# La formule des traces locale tordue

Jean-Loup Waldspurger

# La formule des traces locale tordue

J.-L. Waldspurger

13 septembre 2012

**Introduction**

On se propose de généraliser au cas tordu les résultats d'Arthur contenus dans les articles [A1] et [A7]. Soient $F$ un corps local, $G$ un groupe réductif connexe défini sur $F$ et $\tilde{G}$ un espace tordu sur $G$, au sens de Labesse (cf. 2.1). Nous imposons une condition à $\tilde{G}$ (2.1(2)) qui revient à dire qu'il existe un groupe algébrique non connexe $G^+$ défini sur $F$, de composante neutre $G$, tel que $\tilde{G}$ soit une composante connexe de $G^+$. Mais la structure de groupe sur $G^+$ ne joue aucun rôle, seules importent les actions à droite et à gauche de $G$ sur $\tilde{G}$. Notons $Z_G$ le centre de $G$ et $Z_G(F)^\theta$ le sous-groupe des $z \in Z_G(F)$ tels que $z\gamma = \gamma z$ pour tout $\gamma \in \tilde{G}$. On fixe un caractère unitaire $\omega$ de $G(F)$ dont la restriction à $Z_G(F)^\theta$ est triviale. On s'intéresse aux "distributions" $\omega$-équivariantes sur $\tilde{G}(F)$. Ce sont des formes linéaires $l : C_c^\infty(\tilde{G}(F)) \to \mathbb{C}$ telles que, pour tout $f \in C_c^\infty(\tilde{G}(F))$ et tout $g \in G(F)$, on ait l'égalité $l({}^g f) = \omega(g)^{-1} l(f)$, où ${}^g f$ est la fonction ${}^g f(\gamma) = f(g^{-1}\gamma g)$. Il y a deux types basiques de telles distributions. D'abord les intégrales orbitales. On fixe $\gamma \in \tilde{G}(F)$, disons fortement régulier. On note $Z_G(\gamma)$ son commutant dans $G$ et on munit le quotient $Z_G(\gamma, F)\backslash G(F)$ d'une mesure invariante à droite. Pour $f \in C_c^\infty(\tilde{G}(F))$, l'intégrale orbitale de $f$ au point $\gamma$ est

$$I_{\tilde{G}}(\gamma, \omega, f) = D^{\tilde{G}}(\gamma)^{1/2} \int_{Z_G(\gamma,F)\backslash G(F)} \omega(x) f(x^{-1}\gamma x)\, dx.$$

La fonction $D^{\tilde{G}}(\gamma)$ est la variante tordue de la fonction habituelle. Il y a aussi les caractères de représentations. Soit $\pi$ une représentation admissible et irréductible de $G(F)$. Pour $\gamma \in \tilde{G}(F)$, notons $ad_\gamma$ l'automorphisme de $G$ tel que $\gamma g = ad_\gamma(g)\gamma$ pour tout $g \in G$. La classe d'équivalence de la représentation $\pi \circ ad_\gamma$ ne dépend pas de $\gamma$. Supposons que $\pi \circ ad_\gamma$ soit isomorphe à $\omega \otimes \pi$. On peut alors prolonger $\pi$ en une "$\omega$-représentation" $\tilde{\pi}$ de $\tilde{G}(F)$, c'est-à-dire une application $\tilde{\pi}$ de $\tilde{G}(F)$ dans le groupe des automorphismes de l'espace de $\pi$ qui vérifie la condition $\tilde{\pi}(g\gamma g') = \pi(g)\tilde{\pi}(\gamma)\pi(g')\omega(g')$ pour tous $\gamma \in \tilde{G}(F)$ et $g, g' \in G(F)$. Pour $f \in \tilde{G}(F)$, on définit l'opérateur $\tilde{\pi}(f) = \int_{\tilde{G}(F)} f(\gamma)\tilde{\pi}(\gamma)\, d\gamma$ (une mesure de Haar étant fixée sur $G(F)$ et transportée à $\tilde{G}(F)$), puis le caractère

$$I_{\tilde{G}}(\tilde{\pi}, f) = trace(\tilde{\pi}(f)).$$

La formule des traces locale tordue établit une égalité entre deux expressions, l'une contenant des intégrales orbitales, l'autre des caractères de $\omega$-représentations tempérées. Précisons un tout petit peu. Soient $f_1, f_2 \in C_c^\infty(\tilde{G}(F))$. On définit une expression

$$J^{\tilde{G}}_{g\acute{e}om}(\omega, f_1, f_2) = \sum_{\tilde{M} \in \mathcal{P}(\tilde{M}_0)} |\tilde{W}^M||\tilde{W}^G|^{-1} J^{\tilde{G}}_{\tilde{M}, g\acute{e}om}(\omega, f_1, f_2).$$

L'ensemble $\mathcal{P}(\tilde{M}_0)$ est celui des "ensembles de Levi" $\tilde{M}$ de $\tilde{G}$ contenant un ensemble de Levi minimal fixé $\tilde{M}_0$. Si $\tilde{M}=\tilde{G}$, $J^{\tilde{G}}_{\tilde{G},géom}(\omega,f_1,f_2)$ est une certaine intégrale d'expressions

$$\overline{I_{\tilde{G}}(\gamma,\omega,f_1)}I_{\tilde{G}}(\gamma,\omega,f_2)$$

en des points $\gamma\in\tilde{G}(F)$ qui sont fortement réguliers et elliptiques. Si $\tilde{M}\neq\tilde{G}$, l'expression est plus compliquée : elle fait intervenir des intégrales orbitales pondérées, qui généralisent les intégrales orbitales définies ci-dessus, mais ne sont plus $\omega$-équivariantes. On définit aussi une expression

$$J^{\tilde{G}}_{spec}(\omega,f_1,f_2)=\sum_{\tilde{M}\in\mathcal{P}(\tilde{M}_0)}|\tilde{W}^M||\tilde{W}^G|^{-1}J^{\tilde{G}}_{\tilde{M},spec}(\omega,f_1,f_2).$$

Dans le cas où $\tilde{M}=\tilde{G}$ et où $Z_G(F)^\theta$ est compact, le terme $J^{\tilde{G}}_{\tilde{G},spec}(\omega,f_1,f_2)$ est une somme de produits

$$\overline{I_{\tilde{G}}(\tilde{\pi},f_1)}I_{\tilde{G}}(\tilde{\pi},f_2),$$

où $\tilde{\pi}$ décrit un certain ensemble de $\omega$-représentations de $\tilde{G}(F)$. Même dans ce cas simple, la définition de ces caractères doit être un peu généralisée, car les représentations sous-jacentes aux $\tilde{\pi}$ ne sont pas irréductibles mais seulement de longueur finie. Dans le cas où $Z_G(F)^\theta$ n'est plus compact, il faut intégrer les produits ci-dessus selon des paramètres réminiscents de l'existence de ce centre. Dans le cas où $\tilde{M}\neq\tilde{G}$, l'expression fait intervenir des généralisations des caractères, à savoir les caractères pondérés qui, eux non plus, ne sont pas $\omega$-équivariants.

La formule des traces locale tordue (théorème 5.1) affirme l'égalité

$$J^{\tilde{G}}_{géom}(\omega,f_1,f_2)=J^{\tilde{G}}_{spec}(\omega,f_1,f_2).$$

La première conséquence en est le "théorème 0" de Kazhdan : pour $f\in C_c^\infty(\tilde{G}(F))$, si $f$ vérifie $I_{\tilde{G}}(\tilde{\pi},f)=0$ pour toute $\omega$-représentation tempérée $\tilde{\pi}$ de $\tilde{G}(F)$, alors $I_{\tilde{G}}(\gamma,\omega,f)=0$ pour tout $\gamma$ fortement régulier (théorème 5.5).

Pour aller plus loin, on doit transformer la formule précédente en une formule invariante, comme dans [A7]. Pour cela, on doit utiliser le théorème de Paley-Wiener tordu. Celui-ci a été démontré par Rogawski ([R]) dans le cas où $F$ est non-archimédien et $\omega=1$. Il est démontré toujours dans le cas non-archimédien, mais pour tout $\omega$, dans le travail en cours de Henniart et Lemaire ([HL]). Dans le cas où $F$ est archimédien, il est démontré par Delorme et Mezo pour $\omega=1$ ([DM]). Nous montrons en 6.3 que leur résultat s'étend aisément au cas $\omega$ quelconque. A partir de ce point, les fonctions $f_1$ et $f_2$ sont supposées $K$-finies quand $F$ est archimédien. En utilisant le théorème de Paley-Wiener tordu, on transforme la formule en l'égalité suivante (théorème 6.6) :

$$I^{\tilde{G}}_{géom}(\omega,f_1,f_2)=I^{\tilde{G}}_{disc}(\omega,f_1,f_2).$$

Le terme de gauche est de la forme

$$\sum_{\tilde{M}\in\mathcal{P}(\tilde{M}_0)}|\tilde{W}^M||\tilde{W}^G|^{-1}I^{\tilde{G}}_{\tilde{M},géom}(\omega,f_1,f_2).$$

Il ne contient que des distributions $\omega$-équivariantes (intégrales orbitales pondérées invariantes). Mais le terme principal est le même que précédemment :

$$I^{\tilde{G}}_{\tilde{G},géom}(\omega,f_1,f_2)=J^{\tilde{G}}_{\tilde{G},géom}(\omega,f_1,f_2).$$

Du côté spectral, on a simplement

$$I_{disc}^{\tilde{G}}(\omega, f_1, f_2) = J_{\tilde{G},spec}^{\tilde{G}}(\omega, f_1, f_2).$$

Il ne contient que d'honnêtes caractères de $\omega$-représentations tempérées.

Supposons pour simplifier que $Z_G(F)^\theta$ soit compact. L'ensemble des $\omega$-représentations qui interviennent ici contient le sous-ensemble des représentations elliptiques au sens d'Arthur. Notons-le ici $E_{ell}(\tilde{G}, \omega)$ (cette notation changera de sens dans le corps de l'article). On sait que le caractère d'une $\omega$-représentation $\tilde{\pi}$ de longueur finie est localement intégrable, donc donné par une fonction $\gamma \mapsto \Theta(\tilde{\pi}, \gamma)$. D'après le théorème de Paley-Wiener, on peut associer à tout élément $\tilde{\pi} \in E_{ell}(\tilde{G}, \omega)$ un "pseudo-coefficient" $f_{\tilde{\pi}}$. La formule ci-dessus permet d'exprimer $\Theta(\tilde{\pi}, \gamma)$ au moyen des intégrales orbitales pondérées invariantes de $f_{\tilde{\pi}}$ (théorème 7.2). Notons $\tilde{G}(F)_{ell}$ l'ensemble des éléments fortement réguliers et elliptiques de $\tilde{G}(F)$. On peut munir l'espace des fonctions $\omega$-équivariantes sur $\tilde{G}(F)_{ell}$ d'un produit hermitien raisonnable. Notons $I_{cusp}(\tilde{G}(F), \omega)$ l'espace des fonctions sur $\tilde{G}(F)_{ell}$ de la forme $\gamma \mapsto I_{\tilde{G}}(\gamma, \omega, f)$, où $f$ est une fonction cuspidale sur $\tilde{G}(F)$ (c'est-à-dire que $I_{\tilde{G}}(\gamma, \omega, f) = 0$ si $\gamma$ est fortement régulier et non elliptique). On montre que la famille des restrictions à $\tilde{G}(F)_{ell}$ des caractères $\Theta(\tilde{\pi}, \gamma)$ forme une base orthonormale de $I_{cusp}(\tilde{G}(F), \omega)$ et on calcule la norme de chaque élément de base (théorème 7.3).

Une bonne partie de l'article n'est qu'un décalque des travaux d'Arthur. On s'est autorisé à passer rapidement sur les points dont les démonstrations sont similaires à celles du cas non tordu. Le point qui mérite attention est l'établissement de la partie spectrale de version non invariante de la formule des traces locale tordue (paragraphe 3). Comme dans le cas de la formule des traces d'Arthur-Selberg, l'utilisation dans le cas tordu de la combinatoire du cas non tordu ne conduit à rien de fructueux. On doit profondément modifier cette combinatoire. Heureusement pour nous, la bonne combinatoire a été mise au point par les rédacteurs du Morning Seminar, principalement dans la lecture 15 de Langlands. Ces notes ont été rédigées récemment (cf. [LW]). On utilise ici exactement la même méthode, dont la mise en oeuvre est évidemment beaucoup plus simple que dans le cas global.

# 1 Généralités

## 1.1 Notations

Soit $F$ un corps local de caractéristique nulle. On note $|.|_F$ sa valeur absolue usuelle. Soit $G$ un groupe réductif connexe défini sur $F$. On note $Z_G$ le centre de $G$ et $A_G$ le plus grand tore contenu dans $Z_G$ et déployé sur $F$. On pose $\mathcal{A}_G = X_*(A_G) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$, où $X_*(A_G)$ désigne selon l'usage le groupe des sous-groupes à un paramètre de $A_G$. On note $a_G$ la dimension de $\mathcal{A}_G$. Notons $X_F^*(G)$ le groupe des caractères algébriques définis sur $F$ de $G$. Par restriction à $A_G$, il s'envoie dans le groupe $X^*(A_G)$ des caractères de $A_G$, donc dans le dual $\mathcal{A}_G^*$ de $\mathcal{A}_G$. De façon générale, on note $< .,. >$ l'accouplement naturel entre un espace vectoriel et son dual. On définit l'homomorphisme $H_G : G(F) \to \mathcal{A}_G$ par la condition : $e^{<\chi, H_G(g)>} = |\chi(g)|_F$ pour tout $g \in G(F)$ et tout $\chi \in X_F^*(G)$. On note $\mathcal{A}_{G,F}$ l'image de $G(F)$ par cet homomorphisme et $\mathcal{A}_{A_G,F}$ l'image de $A_G(F)$. Si $F$ est archimédien, $\mathcal{A}_{G,F} = \mathcal{A}_{A_G,F} = \mathcal{A}_G$. Si $F$ est non archimédien, $\mathcal{A}_{G,F}$ et $\mathcal{A}_{A_G,F}$ sont des réseaux dans $\mathcal{A}_G$. Plus précisément, ce sont des réseaux dans $log(q)X_*(A_G) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$, où $q$

est le nombre d'éléments du corps résiduel de $F$. Pour tout sous-groupe fermé $\mathcal{L}$ dans $\mathcal{A}_G$, on note $\mathcal{L}^\vee$ le groupe des $\lambda \in \mathcal{A}_G^*$ tels que $< \lambda, H > \in 2\pi\mathbb{Z}$ pour tout $H \in \mathcal{L}$. Ainsi, via l'exponentielle, $i\mathcal{A}_G^*/i\mathcal{L}^\vee$ s'identifie au groupe dual de $\mathcal{L}$. On pose $\mathcal{A}_{G,F}^* = \mathcal{A}_G^*/\mathcal{A}_{G,F}^\vee$.

Sauf mention expresse du contraire, tous les sous-groupes algébriques de $G$ que l'on considérera seront supposés définis sur $F$. Un Levi de $G$ est une composante de Levi d'un sous-groupe parabolique de $G$. Une paire parabolique est un couple $(P, M)$ où $P$ est un sous-groupe parabolique et $M$ est une composante de Levi de $P$. L'expression "soit $P = MU_P$ un sous-groupe parabolique" signifie que $M$ est une composante de Levi de $P$ et que $U_P$ est le radical unipotent de $P$. Plus précisément, si une paire parabolique minimale $(P_0, M_0)$ est fixée, l'expression "soit $P = MU_P$ un sous-groupe parabolique semi-standard (ou standard)" signifie que $P$ contient $M_0$ (ou $P_0$), que $M$ est la composante de Levi de $P$ qui contient $M_0$ et que $U_P$ est le radical unipotent de $P$. On utilise les notations habituelles d'Arthur. Par exemple, pour un Levi $M$, on note $\mathcal{P}(M)$, resp. $\mathcal{F}(M)$, l'ensemble des sous-groupes paraboliques $P$ dont $M$ est une composante de Levi, resp. qui contiennent $M$. Pour un sous-groupe parabolique $P = MU_P$, on note $\delta_P$ le module usuel, qui est une fonction sur $P(F)$.

Fixons une paire parabolique minimale $(P_0, M_0)$ et un sous-groupe compact maximal $K$ de $G(F)$. On suppose :

- si $F$ est non-archimédien, $K$ est le fixateur d'un point spécial dans l'appartement attaché à $A_{M_0}$ de l'immeuble de $G$ ;

- si $F$ est archimédien, les algèbres de Lie de $K$ et de $A_{M_0}$ sont orthogonales pour la forme de Killing.

On simplifie les notations en notant par un simple indice 0 les objets relatifs à $M_0$ ou $P_0$. Par exemple $A_0 = A_{M_0}$, $\mathcal{A}_0 = \mathcal{A}_{M_0}$, $H_0 = H_{M_0}$, $\delta_0 = \delta_{P_0}$. On note $\Delta_0$ l'ensemble des racines simples de $A_0$ associé à $P_0$. On note $\mathcal{A}_0^{\geq}$ l'ensemble des $H \in \mathcal{A}_0$ tels que $< \alpha, H > \geq 0$ pour tout $\alpha \in \Delta_0$. On note $M_0(F)^{\geq}$ l'ensemble des $m \in M_0(F)$ tels que $H_0(m) \in \mathcal{A}_0^{\geq}$. On a l'égalité $G(F) = KM_0(F)^{\geq}K$. Plus précisément, pour $g \in G(F)$, si l'on écrit $g = kmk'$, avec $k, k' \in K$ et $m \in M_0(F)^{\geq}$, l'élément $H_0(m)$ est uniquement déterminé par $g$, on le note $h_0(g)$. On note $W^G$ le groupe de Weyl de $G$ relatif au tore $A_0$, c'est-à-dire $W^G = Norm_{G(F)}(A_0)/M_0(F)$ (de façon générale, si un groupe $H$ opère sur un ensemble $X$ et si $Y \subset X$, on note $Norm_H(Y)$ le sous-groupe des $h \in H$ tels que $h(Y) = Y$). On fixe une forme quadratique $(.,.)$ sur $\mathcal{A}_0$ définie positive et invariante par $W^G$. On définit la norme $|H| = (H, H)^{1/2}$ pour tout $H \in \mathcal{A}_0$. Par dualité, $\mathcal{A}_0^*$ est aussi muni d'une norme.

Quand on remplace le groupe $G$ par un autre groupe réductif, par exemple un Levi $M$, on ajoute des exposants $M$ dans les notations. Toutefois, si on remplace $G$ par une composante de Levi $M$ d'un sous-groupe parabolique $P$ fixé, il est parfois plus commode d'ajouter un exposant $P$ au lieu de $M$, ou de remplacer un indice $M$ par $P$. Par exemple, on pourra noter $\mathcal{A}_P$ au lieu de $\mathcal{A}_M$. Ou encore, si $P$ est standard, on notera $\Delta_0^M$ ou $\Delta_0^P$ l'ensemble des racines simples de $A_0$ dans $M$ associé au parabolique minimal $P_0 \cap M$. Soit $M$ un Levi de $G$. Choissons un élément $x \in G(F)$ tel que $M' = x^{-1}Mx$ contienne $M_0$. On munit le sous-espace $\mathcal{A}_{M'}$ de $\mathcal{A}_0$ de la restriction de la forme quadratique fixée plus haut. De la conjugaison $ad_x$ se déduit fonctoriellement un isomorphisme noté simplement $H \mapsto xH$ de $\mathcal{A}_{M'}$ sur $\mathcal{A}_M$, grâce auquel on transporte à $\mathcal{A}_M$ la forme quadratique sur $\mathcal{A}_{M'}$. La forme obtenue ne dépend pas du choix de $x$.

Si $M' \subset M$ sont deux Levi, l'espace $\mathcal{A}_M$ est un sous-espace de $\mathcal{A}_{M'}$ dont on note $\mathcal{A}_{M'}^M$ l'orthogonal. Pour $H \in \mathcal{A}_{M'}$, on note $H_M$ et $H^M$ ses projections sur chacun de ces sous-espaces. Remarquons que

(1) l'application $H \mapsto H_M$ envoie surjectivement $\mathcal{A}_{M',F}$ sur $\mathcal{A}_{M,F}$.

Preuve. En conjuguant $M'$, on peut supposer $M_0 \subset M'$. Si $H = H_{M'}(x)$, pour $x \in M'(F)$, on a $H_M = H_M(x)$. Inversement, si $H = H_M(y)$, pour $y \in M(F)$, on fixe $P' \in \mathcal{P}^M(M')$ et on écrit $y = xuk$, avec $x \in M'(F)$, $u \in U_{P'}(F)$ et $k \in K \cap M(F)$. Alors $H_M(y) = H_M(x)$ et $H_M = (H_{M'}(x))_M$. D'où (1). $\square$

Dualement à (1), on a

(2) l'injection $\mathcal{A}_M^* \to \mathcal{A}_{M'}^*$ se quotiente en une injection $\mathcal{A}_{M,F}^* \to \mathcal{A}_{M',F}^*$.

Soit $P = MU_P$ est un sous-groupe parabolique semi-standard. En utilisant l'égalité $G(F) = P(F)K$, on prolonge la fonction $H_M$ en une fonction $H_P : G(F) \to \mathcal{A}_M$ par $H_P(muk) = H_M(m)$ pour tous $m \in M(F)$, $u \in U_P(F)$, $k \in K$. Si de plus $P$ est standard, on note $M_0(F)^{\geq,M}$ ou $M_0(F)^{\geq,P}$ l'ensemble des $m \in M_0(F)$ tels que $< \alpha, H_0(m) > \geq 0$ pour tout $\alpha \in \Delta_0^P$.

Si $X(x_1, x_2, ...)$ et $Y(x_1, x_2, ...)$ sont deux expressions réelles positives ou nulles dépendant de variables $x_1$, $x_2$,..., on dit que $X(x_1, x_2, ...)$ est essentiellement majorée par $Y(x_1, x_2, ...)$ et on écrit $X(x_1, x_2, ...) << Y(x_1, x_2, ...)$ s'il existe $c > 0$ tel que, pour tous $x_1, x_2, ...$, on ait l'inégalité $X(x_1, x_2, ...) \leq cY(x_1, x_2, ...)$. Cette terminologie est quelque peu imprécise (la question étant en pratique de savoir quelles données sont "variables") mais évite d'introduire des kyrielles de constantes $c$ superflues.

On note $C_c^\infty(G(F))$ l'espace des fonctions $f : G(F) \to \mathbb{C}$ qui sont lisses et à support compact. Lisse signifie localement constante si $F$ est non-archimédien, $C^\infty$ si $F$ est archimédien.

## 1.2 Mesures

On munit $G(F)$ d'une mesure de Haar. Pour tout Levi $M$, on munit l'espace $\mathcal{A}_M$ d'une mesure de Haar. On suppose que, si $x \in G(F)$, l'isomorphisme $H \mapsto xH$ de $\mathcal{A}_M$ sur $\mathcal{A}_{xMx^{-1}}$ identifie les mesures sur ces espaces. L'espace $i\mathcal{A}_M^*$ s'identifie via l'exponentielle au groupe dual de $\mathcal{A}_M$ et on le munit de la mesure duale. Cela entraîne que, si $\mathcal{L}$ est un réseau de $\mathcal{A}_M$, on a l'égalité

$$mes(\mathcal{A}_M/\mathcal{L})mes(i\mathcal{A}_M^*/i\mathcal{L}^\vee) = 1,$$

les mesures étant les quotients des mesures que l'on vient de fixer par les mesures de comptage sur les réseaux. On pose $A_M(F)_c = Ker(H_M) \cap A_M(F)$. Dans le cas où $F$ est non-archimédien, on note $mes(i\mathcal{A}_{M,F}^*)$ la masse totale de $i\mathcal{A}_{M,F}^*$. Le groupe $A_M(F)_c$ est un sous-groupe ouvert compact de $A_M(F)$. On munit $A_M(F)$ de la mesure de Haar pour laquelle

$$mes(A_M(F)_c) = mes(\mathcal{A}_M/\mathcal{A}_{A_M,F}).$$

Si $F$ est archimédien, on pose $mes(i\mathcal{A}_{M,F}^*) = 1$. On a la suite exacte

$$1 \to A_M(F)_c \to A_M(F) \to \mathcal{A}_M \to 0.$$

On munit le groupe compact $A_M(F)_c$ de la mesure de Haar de masse totale 1 et le groupe $A_M(F)$ de la mesure de Haar compatible avec la suite ci-dessus. En tout cas, soit $f$ une fonction de Schwartz sur $i\mathcal{A}_{M,F}^*$, définissons une fonction $\hat{f}$ sur $\mathcal{A}_{M,F}$ par

$$\hat{f}(H) = mes(i\mathcal{A}_{M,F}^*)^{-1} \int_{i\mathcal{A}_{M,F}^*} f(\Lambda)e^{-<\Lambda,H>} d\Lambda.$$

On a la formule d'inversion

$$f(\Lambda) = \int_{\mathcal{A}_{M,F}} \hat{f}(H)e^{<\Lambda,H>}\,dH.$$

Remarquons qu'une intégrale sur $\mathcal{A}_{M,F}$ est en fait une série si $F$ est non-archimédien.

Pour deux Levi $M' \subset M$, on munit $\mathcal{A}_{M'}^{M}$ de la mesure compatible aux mesures sur $\mathcal{A}_M$ et $\mathcal{A}_{M'}$ et à l'isomorphisme $\mathcal{A}_{M'} = \mathcal{A}_M \oplus \mathcal{A}_{M'}^{M}$. On munit $i\mathcal{A}_{M'}^{M,*}$ de la mesure duale comme ci-dessus. Dans le cas non archimédien, la masse totale de $i\mathcal{A}_{M'}^{M,*}/\left((i\mathcal{A}_{M',F}^{\vee} + i\mathcal{A}_M^{*}) \cap i\mathcal{A}_{M'}^{M,*}\right)$ est $mes(i\mathcal{A}_{M',F}^{*})mes(i\mathcal{A}_{M,F}^{*})^{-1}$.

Soit $\alpha$ une racine réduite de $A_0$ dans $G$. Comme on le sait, il est attaché à $\alpha$ un Levi $M_\alpha$ qui est minimal parmi les éléments de $\mathcal{L}(M_0) - \{M_0\}$ et un sous-groupe parabolique $P_\alpha = M_0U_\alpha$ de $M_\alpha$. On munit $U_\alpha(F)$ d'une mesure de Haar. On suppose que si $\alpha$ et $\beta$ sont deux telles racines réduites et si $k \in K$ vérifie $kM_0k^{-1} = M_0$, $kP_\alpha k^{-1} = P_\beta$, alors la conjugaison par $k$ identifie les mesures sur $U_\alpha(F)$ et $U_\beta(F)$. Considérons un sous-groupe unipotent $U$ de $G$ qui est produit de tels groupes $U_{\alpha_i}$, pour $i = 1, ..., n$. On munit $U(F)$ de la mesure pour laquelle le produit

$$\prod_{i=1,\dots,n} U_{\alpha_i}(F) \to U(F)$$

préserve les mesures. Cela ne dépend pas de l'ordre du produit. L'hypothèse sur $U$ est vérifiée si $U$ est le radical unipotent d'un sous-groupe parabolique semi-standard de $G$, ou si $U$ est le radical unipotent d'un sous-groupe parabolique semi-standard d'un Levi semi-standard de $G$, ou si $U$ est une intersection de tels groupes.

Pour tout Levi $M \in \mathcal{L}(M_0)$, on munit $M(F)$ d'une mesure. On impose les conditions suivantes, dont on vérifie aisément qu'elles sont loisibles. D'abord, si $M$ et $M'$ sont deux éléments de $\mathcal{L}(M_0)$ et si $x \in G(F)$ vérifie $xMx^{-1} = M'$, on suppose que la conjugaison par $x$ identifie les mesures sur $M(F)$ et $M'(F)$. Ensuite, si $M \subset L$ sont deux éléments de $\mathcal{L}(M_0)$ et si $P = MU_P \in \mathcal{P}^L(M)$, on impose que l'on ait l'égalité

$$\int_{L(F)} f(l)\,dl = \int_{U_{\bar{P}}(F)} \int_{M(F)} \int_{U_P(F)} f(\bar{u}mu)\delta_P(m)\,du\,dm\,d\bar{u}$$

pour toute $f \in C_c^\infty(L(F))$, où $\bar{P} = MU_{\bar{P}}$ est le parabolique opposé à $P$.

On munit le groupe $K$ de la mesure de Haar de masse totale 1. Remarquons que, dans le cas où $F$ est non-archimédien, on n'impose pas que la mesure sur $G(F)$ se restreigne en cette mesure sur $K$. Plus généralement, pour tout Levi semi-standard $M$ de $G$, on pose $K^M = K \cap M(F)$ et on munit ce groupe de la mesure de Haar de masse totale 1. On vérifie que, pour deux Lévi semi-standard $M \subset L$, il existe un réel $\gamma(L|M) > 0$ tel que, pour tout $P = MU_P \in \mathcal{P}^L(M)$, on ait l'égalité

$$\int_{L(F)} f(l)\,dl = \gamma(L|M) \int_{M(F)} \int_{U_P(F)} \int_{K^L} f(muk)\,dk\,du\,dm$$

pour toute $f \in C_c^\infty(L(F))$. On a l'égalité $\gamma(G|M) = \gamma(G|L)\gamma(L|M)$.

On introduit la fonction $D_0$ sur $M_0(F)^{\geq}$, à valeurs réelles positives, telle que l'on ait l'égalité

$$\int_{G(F)} f(g)\,dg = \int_{K\times K} \int_{M_0(F)^{\geq}} D_0(m)f(kmk')\,dm\,dk\,dk'$$

pour toute $f \in C_c^\infty(G(F))$. Elle vérifie la majoration

(1) $D_0(m) << \delta_0(m)^{1/2}$ pour tout $m \in M_0(F)^{\geq}$.

Cf. [A1] corollaire 1.2.

**Remarque.** Nos mesures ne sont pas normalisées comme en [A1] : pour $M \in \mathcal{L}(M_0)$, Arthur prend pour mesure sur $M(F)$ celle que l'on a définie multipliée par $\gamma(G|M)^2$. Cela entraîne que notre fonction $D_0$ est égale à celle d'Arthur multipliée par $\gamma(G|M_0)^2$.

## 1.3 Définitions combinatoires

Les propriétés énoncées dans ce paragraphe sont aujourd'hui bien connues. La plupart sont dues à Arthur, Langlands et Labesse. On donne pour référence l'article récent [LW] qui les a rassemblées.

Soit $P = MU_P$ un sous-groupe parabolique semi-standard de $G$. On note $\Delta_P$ l'ensemble des racines simples de $A_M$ associé à $P$. Il s'agit d'une base de $\mathcal{A}_M^{G,*}$. On note $\{\check{\varpi}_\alpha; \alpha \in \Delta_P\}$ sa base duale. A toute racine $\alpha \in \Delta_P$, on peut associer une coracine $\check{\alpha} \in \mathcal{A}_M^G$. Dans le cas où $P = P_0$ et $M = M_0$, l'ensemble des racines de $A_0$ est un vrai système de racines et on definit les coracines selon l'usage. Dans le cas général, quitte à conjuguer $P$, on peut supposer $P$ standard. Alors $\Delta_P$ est l'ensemble des projections non nulles sur $\mathcal{A}_M$ d'éléments de $\Delta_0$ et on définit les coracines comme les projections non nulles des coracines associées aux éléments de $\Delta_0$. Cela ne dépend pas de la conjugaison. On introduit la base $\{\varpi_\alpha; \alpha \in \Delta_P\}$ de $\mathcal{A}_M^{G,*}$ duale de celle des coracines. Une propriété essentielle est que $(\alpha, \beta) \leq 0$ et $(\varpi_\alpha, \varpi_\beta) \geq 0$ pour tous $\alpha \neq \beta \in \Delta_P$.

Soient $P = MU_P \subset Q = LU_Q$ deux sous-groupes paraboliques semi-standard. On note $\Delta_P^Q \subset \Delta_P$ l'ensemble des racines simples de $A_M$ dans l'algèbre de Lie de $L \cap U_P$. On définit les fonctions suivantes sur $\mathcal{A}_M$ :

$\tau_P^Q$ fonction caractéristique de l'ensemble des $H \in \mathcal{A}_M$ tels que $< \alpha, H >> 0$ pour tout $\alpha \in \Delta_P^Q$ ;

$\hat{\tau}_P^Q$ fonction caractéristique de l'ensemble des $H \in \mathcal{A}_M$ tels que $< \varpi_\alpha^L, H >> 0$ pour tout $\alpha \in \Delta_P^Q$ ;

$\phi_P^Q$ fonction caractéristique de l'ensemble des $H \in \mathcal{A}_M$ tels que $< \varpi_\alpha^L, H >\leq 0$ pour tout $\alpha \in \Delta_P^Q$ ;

$\delta_M^Q$ fonction caractéristique du sous-ensemble $\mathcal{A}_L$ de $\mathcal{A}_M$.

Si $P' = M'U_{P'}$ est un sous-groupe parabolique semi-standard contenu dans $P$, ces fonctions peuvent être considérées comme des fonctions sur $\mathcal{A}_{M'}$, en les identifiant avec leurs composées avec la projection orthogonale de $\mathcal{A}_{M'}$ sur $\mathcal{A}_M$. On supprimera souvent les indices $P$ quand $P = P_0$.

On a

$$(1) \qquad \sum_{R; M \subset R \subset Q} \delta_M^R(H) \tau_R^Q(H) = 1.$$

Cela traduit la décomposition de $\mathcal{A}_M$ en chambres positives relatives aux paraboliques $R$ indiqués. On a l'égalité (qui est un lemme de Langlands) :

$$(2) \qquad \sum_{R; P \subset R \subset Q} \phi_P^R(H) \tau_R^Q(H) = 1.$$

On définit la fonction $\Gamma_P^Q$ sur $\mathcal{A}_M \times \mathcal{A}_M$ par

$$\Gamma_P^Q(H, X) = \sum_{R; P \subset R \subset Q} (-1)^{a_R - a_Q} \tau_P^R(H) \hat{\tau}_R^Q(H - X).$$

On rappelle que $a_R$, resp. $a_Q$, est la dimension de $\mathcal{A}_R$, resp. $\mathcal{A}_Q$. Sur le support de cette fonction, on a une majoration $|H_M^L| << |X_M^L|$. On a

$$(3) \qquad \sum_{R;P\subset R\subset Q} \Gamma_R^Q(H,X)\phi_P^R(H) = \phi_P^Q(H-X).$$

Preuve. Il résulte de la formule du binôme que la définition de $\phi_P^Q(H)$ peut s'écrire

$$(4) \qquad \phi_P^Q(H) = \sum_{S;P\subset S\subset Q} (-1)^{a_S-a_Q}\hat{\tau}_S^Q(H).$$

On applique cette définition en remplaçant $Q$ par $R$ ainsi que la définition de $\Gamma_R^Q(H,X)$. Le membre de gauche de (3) devient

$$\sum_{S,R,S';P\subset S\subset R\subset S'\subset Q} (-1)^{a_S-a_R+a_{S'}-a_Q}\hat{\tau}_S^R(H)\tau_R^{S'}(H)\hat{\tau}_{S'}^Q(H-X).$$

Pour $S,S'$ fixés, la somme

$$\sum_{R;S\subset R\subset S'} (-1)^{a_S-a_R}\hat{\tau}_S^R(H)\tau_R^{S'}(H)$$

vaut 1 si $S=S'$ et 0 sinon (cf. [LW] proposition 1.7.2). L'expression précédente se simplifie en

$$\sum_{S;P\subset S\subset Q} (-1)^{a_S-a_Q}\hat{\tau}_S^Q(H-X).$$

En appliquant de nouveau (4), c'est $\phi_P^Q(H-X)$. Cela prouve (3). $\square$

On a

$$(5) \qquad \sum_{R;P\subset R\subset Q} \Gamma_P^R(H,X)\tau_R^Q(H-X) = \tau_P^Q(H).$$

La preuve est similaire à celle de (3).

Soit $M$ un Levi semi-standard. Considérons une famille $\mathcal{Y} = (Y[P])_{P\in\mathcal{P}(M)}$ où, pour tout $P$, $Y[P]$ est un élément de $\mathcal{A}_M$. On dit qu'elle est $(G,M)$-orthogonale si elle vérifie les conditions suivantes. Soient $P,P'\in\mathcal{P}(M)$ deux éléments adjacents. Soit $\alpha$ l'unique racine réduite de $A_M$ qui est positive pour $P$ et négative pour $P'$. Alors $Y[P]-Y[P']$ appartient à la droite portée par $\check{\alpha}$. On dit que $\mathcal{Y}$ est positive si $Y[P]-Y[P']$ appartient à la demi-droite portée par $\check{\alpha}$. Si $F$ est non-archimédien, on dit que $\mathcal{Y}$ est $p$-adique si $Y[P]\in\mathcal{A}_{M,F}\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{Q}$ pour tout $P\in\mathcal{P}(M)$. Pour une famille $(G,M)$-orthogonale $\mathcal{Y}$ et pour $Q=LU_Q\in\mathcal{F}(M)$, on pose $Y[Q]=Y[P]_L$, où $P$ est un élément de $\mathcal{P}(M)$ tel que $P\subset Q$. Cela ne dépend pas du choix de $P$. Si on fixe $L\in\mathcal{L}(M)$, la famille $(Y[Q])_{Q\in\mathcal{P}(L)}$ est encore $(G,L)$-orthogonale et est positive si la famille de départ l'est. Dans le cas particulier où $M=M_0$, on associe à tout élément $T\in\mathcal{A}_0$ une famille $(G,M_0)$-orthogonale $\mathcal{T}=(T[P])_{P\in\mathcal{P}(M_0)}$ de la façon suivante. Pour $P\in\mathcal{P}(M_0)$, soit $w\in W^G$ tel que $w(P_0)=P$. On pose $T[P]=wT$. Cette famille est positive si et seulement si $T\in\mathcal{A}_0^{\geq}$.

Pour une famille $(G,M)$-orthogonale $\mathcal{Y}=(Y[P])_{P\in\mathcal{P}(M)}$ et pour $Q=LU_Q\in\mathcal{F}(M)$, on définit une fonction $\Gamma_M^Q(.,\mathcal{Y})$ sur $\mathcal{A}_M$ par

$$\Gamma_M^Q(H,\mathcal{Y}) = \sum_{R\in\mathcal{F}(M);R\subset Q} \delta_M^R(H)\Gamma_R^Q(H,Y[R]).$$

Sur le support de cette fonction, on a une majoration $|H^L| << sup_{P\in\mathcal{P}(M);P\subset Q}|Y(P)^L|$. Dans le cas où la famille est positive, c'est la fonction caractéristique de l'ensemble des $H\in\mathcal{A}_M$ tels que $H^L$ appartient à l'enveloppe convexe de la famille des points $Y[P]^L$ pour $P\in\mathcal{P}(M)$, $P\subset Q$. On a l'égalité

$$(6)\qquad \sum_{Q\in\mathcal{F}(M)}\Gamma_M^Q(H,\mathcal{Y})\tau_Q^G(H-Y[Q])=1.$$

Cf. [LW] lemme 1.8.4(3).

Fixons $P_1\in\mathcal{P}(M)$, ce qui définit un ordre sur l'ensemble des racines de $A_M$, noté $\alpha>_{P_1}0$. Pour $P\in\mathcal{P}(M)$, notons $\phi_{P,P_1}^G$ la fonction caractéristique de l'ensemble des $H\in\mathcal{A}_M$ tels que

- pour $\alpha\in\Delta_P$ tel que $\alpha>_{P_1}0$, $<\varpi_\alpha,H>\leq 0$ ;

- pour $\alpha\in\Delta_P$ tel que $\alpha<_{P_1}0$, $<\varpi_\alpha,H>>0$.

Notons $s(P,P_1)$ le nombre de $\alpha\in\Delta_P$ tel que $\alpha<_{P_1}0$. On a l'égalité

$$(7)\qquad \Gamma_M^G(H,\mathcal{Y})=\sum_{P\in\mathcal{P}(M)}(-1)^{s(P,P_1)}\phi_{P,P_1}^G(H-Y[P]).$$

Cf. [LW] proposition 1.8.7(2).

Pour $H\in\mathcal{A}_0$, on note $\mathcal{C}^G(H)$ l'enveloppe convexe des $wH$ pour $w\in W^G$. Supposons $H\in\mathcal{A}_0^{\geq}$. Alors, pour tout $H'\in\mathcal{A}_0$, $H'$ appartient à $\mathcal{C}^G(H)$ si et seulement si on a $\phi_{w(P_0)}^G(H'-wH)=1$ pour tout $w\in W^G$. Pour $H'\in\mathcal{A}_0^{\geq}$, $H'$ appartient à $\mathcal{C}^G(H)$ si et seulement si $\phi_{P_0}^G(H'-H)=1$.

**Lemme**. *Pour tout $m\in M_0(F)$, tout $k\in K$ et tout $P\in\mathcal{P}(M_0)$, $H_P(km)$ appartient à $\mathcal{C}^G(H_0(m))$.*

Preuve. On utilise les deux ingrédients suivants.

(8) Pour tous $g\in G(F)$ et tous $P,P'\in\mathcal{P}(M_0)$, on a $\phi_P^G(H_P(g)-H_{P'}(g))=1$.

Autrement dit, la famille $(-H_P(g))_{P\in\mathcal{P}(M_0)}$ est $(G,M_0)$-orthogonale et positive, cf. [A2] p. 40.

(9) Supposons $m\in M_0(F)^{\geq}$ ; alors, pour tout $k\in K$, $\phi_{\bar{P}_0}^G(H_{\bar{P}_0}(km)-H_0(m))=1$.

Ceci est un ingrédient de la théorie de la transformée de Satake, cf. [HC] lemme 35 et [BT] corollaire 4.3.17.

Venons-en à la preuve du lemme. Conjuguer $m$ par un élément de $Norm_K(M_0)$ ne change pas le problème. On peut donc supposer $m\in M_0(F)^{\geq}$. Soit $w\in W^G$. On doit prouver que $\phi_{w(P_0)}^G(H_P(km)-wH_0(m))=1$. Ou encore que $\phi_{P_0}^G(w^{-1}H_P(km)-H_0(m))=1$. Or $w^{-1}H_P(km)=H_{w^{-1}(P)}(\dot{w}^{-1}km)$, où $\dot{w}$ est un représentant de $w$ dans $K$. Quitte à remplacer $k$ par $\dot{w}k$ et $P$ par $w(P)$, on est ramené à prouver $\phi_{P_0}^G(H_P(km)-H_0(m))=1$ pour tous $k$, $P$. D'après (8), on a $\phi_{\bar{P}_0}^G(H_{\bar{P}_0}(km)-H_P(km))=1$. C'est équivalent à $\phi_{P_0}^G(H_P(km)-H_{\bar{P}_0}(km))=1$. En utilisant (9) et le fait que $\phi_{P_0}^G$ est la fonction caractéristique d'un cône (qui est stable par addition), on en déduit la relation $\phi_{P_0}^G(H_P(km)-H_0(m))=1$ cherchée. $\square$

## 1.4 $(G,M)$-familles

Soit $M$ un Levi de $G$. D'après Arthur, une $(G,M)$-famille est une famille $(\varphi(\Lambda,P))_{P\in\mathcal{P}(M)}$ vérifiant les conditions suivantes :

- pour tout $P$, $\Lambda \mapsto \varphi(\Lambda, P)$ est une fonction $C^\infty$ sur $i\mathcal{A}_M^*$ ;

- soient $P, P' \in \mathcal{P}(M)$ deux paraboliques adjacents, soit $\mathcal{H} \subset \mathcal{A}_M^*$ le mur séparant les chambres positives associées à $P$ et $P'$ ; alors $\varphi(\Lambda, P) = \varphi(\Lambda, P')$ pour $\Lambda \in i\mathcal{H}$.

Pour $P \in \mathcal{P}(M)$, le réseau engendré par les coracines associées aux éléments de $\Delta_P$ ne dépend pas de $P$. On le note $\mathbb{Z}(\check{\Delta}_M)$. On définit la fonction méromorphe $\epsilon_P^G$ sur $\mathcal{A}_{M,\mathbb{C}}^* = \mathcal{A}_M^* \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ par

$$\epsilon_P^G(\Lambda) = mes(\mathcal{A}_M^G/\mathbb{Z}[\check{\Delta}_M]) \prod_{\alpha \in \Delta_P} < \Lambda, \check{\alpha} >^{-1} .$$

**Remarque.** Arthur note cette fonction $\theta_P^G(\Lambda)^{-1}$. On réserve la lettre $\theta$ pour un autre usage.

Pour une $(G, M)$-famille comme ci-dessus, on définit la fonction $\varphi_M^G$ sur $i\mathcal{A}_M^*$ par

$$\varphi_M^G(\Lambda) = \sum_{P \in \mathcal{P}(M)} \varphi(\Lambda, P)\epsilon_P^G(\Lambda).$$

Le point essentiel est qu'il s'agit d'une fonction $C^\infty$ (les singularités des fonctions $\epsilon_P^G$ disparaissent). Dans le cas où $F$ est archimédien, on a aussi :

**Lemme**. *Supposons $F$ archimédien. Si les fonctions $\varphi(\Lambda, P)$ sont de Schwartz, $\varphi_M^G$ l'est aussi. Si les fonctions $\varphi(\Lambda, P)$ ainsi que leurs dérivées sont à croissance modérée, $\varphi_M^G$ et ses dérivées le sont aussi.*

Cela résulte par exemple du lemme 13.2.2 de [LW].

## 1.5 Variantes des fonctions $\epsilon_P^G$

Soient $M$ un Levi semi-standard et $Y \in \mathcal{A}_M$. Si $F$ est non-archimédien, on suppose plus précisément que $Y \in \mathcal{A}_{M,F} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$. Soit $X \in \mathcal{A}_{G,F}$. On pose

$$\mathcal{A}_{M,F}^G(X) = \{H \in \mathcal{A}_{M,F}; H_G = X\}.$$

Si $F$ est non-archimédien, on munit cet ensemble de la mesure de comptage. Si $F$ est archimédien, cet ensemble est égal à $X + \mathcal{A}_M^G$ et on le munit de la mesure déduite de celle sur $\mathcal{A}_M^G$.

Pour $P \in \mathcal{P}(M)$ et $\Lambda \in \mathcal{A}_{M,\mathbb{C}}^*$, considérons l'intégrale

$$\epsilon_P^{G,Y}(X; \Lambda) = \int_{\mathcal{A}_{M,F}^G(X)} \phi_P^G(H - Y)e^{<\Lambda,H>}\, dH.$$

Elle est absolument convergente si $< \Lambda, \check{\alpha} >> 0$ pour tout $\alpha \in \Delta_P$. Dans ce domaine, elle ne dépend que de la projection de $\Lambda$ dans $\mathcal{A}_{M,\mathbb{C}}^*/i\mathcal{A}_{M,F}^\vee$. Si $F$ est archimédien, on calcule

$$\epsilon_P^{G,Y}(X; \Lambda) = e^{<\Lambda,X+Y^G>}\epsilon_P^G(\Lambda).$$

Supposons $F$ non archimédien. On peut fixer $X' \in \mathcal{A}_{M,F}$ tel que $X'_G = X$ (cf. 1.1(1)). Notons $\mathcal{A}_{M,F}^G = \mathcal{A}_{M,F}^G(0) = \mathcal{A}_{M,F} \cap \mathcal{A}_M^G$. Alors $\mathcal{A}_{M,F}^G(X) = X' + \mathcal{A}_{M,F}^G$. Par le changement de variables $H \mapsto H + X'$,

$$\epsilon_P^{G,Y}(X; \Lambda) = e^{<\Lambda,X'>}\epsilon_P^{G,Y-X'}(0; \Lambda).$$

Fixons un entier $k \geq 1$, posons $\mathcal{L}_k = \frac{1}{k}log(q)\mathbb{Z}[\check{\Delta}_M]$ où $q$ est le nombre d'éléments du corps résiduel de $F$. Si $k$ est assez grand, ce réseau contient $\mathcal{A}^G_{M,F}$ et $Y^G - (X')^G$. On fixe $k$ de sorte qu'il en soit ainsi. Par inversion de Fourier, on a

$$\epsilon^{G,Y}_P(X;\Lambda) = [\mathcal{L}_k : \mathcal{A}^G_{M,F}]^{-1}e^{<\Lambda,X'>}\sum_{\nu\in i\mathcal{A}^{G,\vee}_{M,F}/i\mathcal{L}^\vee_k}\sum_{H\in\mathcal{L}_k}\phi^G_P(H+X'-Y)e^{<\Lambda+\nu,H>}$$

$$= [\mathcal{L}_k : \mathcal{A}^G_{M,F}]^{-1}e^{<\Lambda,X'>}\sum_{\nu\in i\mathcal{A}^{G,\vee}_{M,F}/i\mathcal{L}^\vee_k}\sum_{H\in\mathcal{L}_k}\phi^G_P(H)e^{<\Lambda+\nu,H+Y^G-(X')^G>}.$$

Les ensembles $\mathcal{A}^{G,\vee}_{M,F}$ et $\mathcal{L}^\vee_k$ sont des réseaux dans $\mathcal{A}^{G,*}_M$. L'ensemble des $H \in \mathcal{L}_k$ tels que $\phi^G_P(H) = 1$ est celui des $\sum_{\alpha\in\Delta_P}\kappa n_\alpha\check{\alpha}$ pour des entiers $n_\alpha \leq 0$, où $\kappa = \frac{1}{k}log(q)$. La série

$$\sum_{H\in\mathcal{L}_k}\phi^G_P(H)e^{<\Lambda,H>}$$

se calcule. Elle vaut $\epsilon^G_{P,k}(\Lambda)$, où

$$\epsilon^G_{P,k}(\Lambda) = \prod_{\alpha\in\Delta_P}(1-e^{-<\Lambda,\kappa\check{\alpha}>})^{-1}.$$

On obtient

$$(1) \qquad \epsilon^{G,Y}_P(X;\Lambda) = [\mathcal{L}_k : \mathcal{A}^G_{M,F}]^{-1}e^{<\Lambda,X'>}\sum_{\nu\in i\mathcal{A}^{G,\vee}_{M,F}/i\mathcal{L}^\vee_k}e^{<\Lambda+\nu,Y^G-(X')^G>}\epsilon^G_{P,k}(\Lambda+\nu).$$

Cette expression se prolonge méromorphiquement à tout $\Lambda \in \mathcal{A}^*_{M,\mathbb{C}}$.

Fixons $P_1 \in \mathcal{P}(M)$. Pour $P \in \mathcal{P}(M)$ et $\Lambda \in \mathcal{A}^*_{M,\mathbb{C}}$, posons

$$\epsilon^{G,Y}_{P,P_1}(X;\Lambda) = \int_{\mathcal{A}^G_{M,F}(X)}\phi^G_{P,P_1}(H-Y)e^{<\Lambda,H>}\,dH.$$

Elle est absolument convergente si $<\Lambda,\check{\alpha}>> 0$ pour tout $\alpha \in \Delta_{P_1}$. Montrons que

(2) cette fonction se prolonge méromorphiquement à tout $\Lambda \in \mathcal{A}^*_{M,\mathbb{C}}$ ; on a l'égalité $\epsilon^{G,Y}_{P,P_1}(X;\Lambda) = (-1)^{s(P,P_1)}\epsilon^{G,Y}_P(X;\Lambda)$.

On traite le cas où $F$ est non-archimédien, le cas archimédien étant plus facile. Le même calcul qui a conduit à l'égalité (1) conduit à une égalité similaire exprimant $\epsilon^{G,Y}_{P,P_1}(X;\Lambda)$. La fonction $\epsilon^G_{P,k}(\Lambda)$ y est remplacée par une fonction $\epsilon^G_{P,P_1,k}(\Lambda)$. Supposons $<\Lambda,\check{\alpha}>> 0$ pour tout $\alpha \in \Delta_{P_1}$. Alors cette fonction est définie par

$$\epsilon^G_{P,P_1,k}(\Lambda) = \sum_{H\in\mathcal{L}_k}\phi^G_{P,P_1}(H)e^{<\Lambda,H>}.$$

L'ensemble des $H \in \mathcal{L}_k$ tels que $\phi^G_{P,P_1}(H) = 1$ est celui des $\sum_{\alpha\in\Delta_P}\kappa n_\alpha\check{\alpha}$, où $\kappa$ est comme ci-dessus et les entiers $n_\alpha$ vérifient

- $n_\alpha \leq 0$ si $<\Lambda,\check{\alpha}>> 0$ ;
- $n_\alpha > 0$ si $<\Lambda,\check{\alpha}>< 0$.

Pour un réel $t \neq 0$, on a les égalités élémentaires

$\sum_{n>0}e^{nt} = -(1-e^{-t})^{-1}$, si $t < 0$ ;

$\sum_{n\leq 0}e^{nt} = (1-e^{-t})^{-1}$, si $t > 0$.

On calcule alors $\epsilon^G_{P,P_1,k}(\Lambda) = (-1)^{s(P,P_1)}\epsilon^G_{P,k}(\Lambda)$. Cette égalité se prolonge à tout $\Lambda$. Cela entraîne (2).

## 1.6 Variantes des fonctions $\varphi_M^G$

Soient $M$ un Levi semi-standard, $X \in \mathcal{A}_{G,F}$, $\mathcal{Y} = (Y[P])_{P\in\mathcal{P}(M)}$ une famille $(G,M)$-orthogonale et $(\varphi(\Lambda,P))_{P\in\mathcal{P}(M)}$ une $(G,M)$-famille.

Supposons d'abord $F$ archimédien. Définissons la fonction

$$(1) \qquad \varphi_M^{G,\mathcal{Y}}(X;\Lambda) = \sum_{P\in\mathcal{P}(M)} \varphi(\Lambda,P)\epsilon_P^{G,Y[P]}(X;\Lambda).$$

Si l'on pose $\varphi(\mathcal{Y};\Lambda,P) = \varphi(\Lambda,P)e^{<\Lambda,Y[P]^G>}$, la famille $(\varphi(\mathcal{Y};\Lambda,P))_{P\in\mathcal{P}(M)}$ est une $(G,M)$-famille et on a l'égalité $\varphi_M^{G,\mathcal{Y}}(X;\Lambda) = e^{<\Lambda,X>}\varphi_M^G(\mathcal{Y};\Lambda)$. Cette fonction est donc $C^\infty$.

Supposons maintenant $F$ non-archimédien. On suppose que la famille $\mathcal{Y}$ est $p$-adique, cf. 1.3. On suppose aussi que la famille $(\varphi(\Lambda,P))_{P\in\mathcal{P}(M)}$ est $p$-adique, notion que l'on définit de la façon suivante : on suppose que

- pour tout $P$, la fonction $\Lambda \mapsto \varphi(\Lambda,P)$ est invariante par $i\mathcal{A}_{M,F}^\vee$, autrement dit se descend en une fonction sur $i\mathcal{A}_{M,F}^*$.

On définit la fonction $\varphi_M^{G,\mathcal{Y}}(X;\Lambda)$ par l'égalité (1).

**Lemme**. *On suppose que $F$ est non-archimédien, que $\mathcal{Y}$ est une famille $(G,M)$-orthogonale $p$-adique et que $(\varphi(\Lambda,P))_{P\in\mathcal{P}(M)}$ est une $(G,M)$-famille $p$-adique. Alors la fonction $\varphi_M^{G,\mathcal{Y}}(X;\Lambda)$ est $C^\infty$ sur $i\mathcal{A}_M^*$ et invariante par $i\mathcal{A}_{M,F}^\vee$.*

Preuve. L'invariance est évidente puisque toutes nos fonctions le sont. Reprenons le réseau $\mathcal{L}_k$ de 1.5. On utilise le lemme 10.2 de [A1]. Il affirme l'existence d'une $(G,M)$-famille $(u_k(\Lambda,P))_{P\in\mathcal{P}(M)}$, où $\Lambda \mapsto u_k(\Lambda,P)$ appartient à $C_c^\infty(i\mathcal{A}_M^*/i\mathcal{A}_G^*)$, vérifiant les propriétés suivantes :

- pour tout $P$ et tout $\Lambda$, $\sum_{\mu\in i\mathcal{L}_k^\vee} u_k(\Lambda+\mu,P) = 1$ ;

- pour tout $P$, la fonction $v_k(\Lambda,P) = u_k(\Lambda,P)\epsilon_{P,k}^G(\Lambda)\epsilon_P^G(\Lambda)^{-1}$ est lisse sur $i\mathcal{A}_M^*/i\mathcal{A}_G^*$.

On peut glisser la somme

$$\sum_{\mu\in i\mathcal{L}_k^\vee} u_k(\Lambda+\nu+\mu,P)$$

dans la formule 1.5(1). En regroupant les deux sommes de la formule obtenue, on obtient

$$\epsilon_P^{G,Y}(X;\Lambda) = [\mathcal{L}_k : \mathcal{A}_{M,F}^G]^{-1}e^{<\Lambda,X'>} \sum_{\nu\in i\mathcal{A}_{M,F}^{G,\vee}} e^{<\Lambda+\nu,Y^G-(X')^G>}\epsilon_{P,k}^G(\Lambda+\nu)u_k(\Lambda+\nu,P)$$

$$= [\mathcal{L}_k : \mathcal{A}_{M,F}^G]^{-1}e^{<\Lambda,X'>} \sum_{\nu\in i\mathcal{A}_{M,F}^{G,\vee}} e^{<\Lambda+\nu,Y^G-(X')^G>}v_k(\Lambda+\nu,P)\epsilon_P^G(\Lambda+\nu).$$

Notons que la somme est localement finie d'après la compacité du support de $u_k(\Lambda,P)$. On en déduit

$$(2) \qquad \varphi_M^{G,\mathcal{Y}}(X;\Lambda) = [\mathcal{L}_k : \mathcal{A}_{M,F}^G]^{-1}e^{<\Lambda,X>} \sum_{\nu\in i\mathcal{A}_{M,F}^{G,\vee}} e^{-<\nu,(X')^G>}$$

$$\sum_{P\in\mathcal{P}(M)} \varphi(\Lambda,P)e^{<\Lambda+\nu,Y[P]^G>}v_k(\Lambda+\nu,P)\epsilon_P^G(\Lambda+\nu).$$

Posons
$$\varphi(\nu,\mathcal{Y};\Lambda,P)=\varphi(\Lambda-\nu,P)e^{<\Lambda,Y[P]^G>}v_k(\Lambda,P).$$
Montrons que

(3) $(\varphi(\nu,\mathcal{Y};\Lambda,P))_{P\in\mathcal{P}(M)}$ est une $(G,M)$-famille.

La famille $(e^{<\Lambda,Y[P]^G>})_{P\in\mathcal{P}(M)}$ est une $(G,M)$-famillle. La famille $(v_k(\Lambda,P))_{P\in\mathcal{P}(M)}$ aussi : cela résulte aisément du fait que $(u_k(\Lambda,P))_{P\in\mathcal{P}(M)}$ en est une. Il reste à montrer que $(\varphi(\Lambda-\nu,P))_{P\in\mathcal{P}(M)}$ en est une. Or $i\mathcal{A}_{M,F}^{G,\vee}=(i\mathcal{A}_{M,F}^{\vee}+i\mathcal{A}_G^*)\cap i\mathcal{A}_M^{G,*}$. Il suffit de montrer que $(\varphi(\Lambda-\nu,P))_{P\in\mathcal{P}(M)}$ est une $(G,M)$-famille pour $\nu\in i\mathcal{A}_{M,F}^{\vee}+i\mathcal{A}_G^*$. Par hypothèse, nos fonctions sont invariantes par $i\mathcal{A}_{M,F}^{\vee}$. On peut donc se limiter à $\nu\in i\mathcal{A}_G^*$. Mais il est clair que les conditions définissant une $(G,M)$-famille sont invariantes par translation par $i\mathcal{A}_G^*$. D'où (3).

Alors (2) se récrit
$$\varphi_M^{G,\mathcal{Y}}(X;\Lambda)=[\mathcal{L}_k:\mathcal{A}_{M,F}^G]^{-1}e^{<\Lambda,X>}\sum_{\nu\in i\mathcal{A}_{M,F}^{G,\vee}}e^{-<\nu,(X')^G>}\varphi_M^G(\nu,\mathcal{Y};\Lambda+\nu)$$
et ces fonctions sont $C^\infty$ d'après les propriétés des $(G,M)$-familles habituelles. $\square$

**Remarque** Pour $Z\in\mathcal{A}_{A_G,F}$, on a l'égalité
$$\varphi_M^{G,\mathcal{Y}}(X+Z;\Lambda)=e^{<\Lambda,Z>}\varphi_M^{G,\mathcal{Y}}(X;\Lambda).$$
En particulier, si l'on restreint la variable $\Lambda$ à l'ensemble $(i\mathcal{A}_M^{G,*}+i\mathcal{A}_{M,F}^{\vee})/i\mathcal{A}_{M,F}^{\vee}$, la fonction $X\mapsto\varphi_M^{G,\mathcal{Y}}(X;\Lambda)$. devient invariante par $\mathcal{A}_{A_G,F}$.

## 1.7 Développement en fonction d'un paramètre $T$

Si $F$ est archimédien, notons $PolExp$ l'ensemble des fonctions $f:\mathcal{A}_0\to\mathbb{C}$ pour lesquelles il existe une famille $(p_\Lambda)_{\Lambda\in i\mathcal{A}_0^*}$ de polynômes sur $\mathcal{A}_0$ de sorte que

- l'ensemble des $\Lambda$ tels que $p_\Lambda\neq 0$ est fini ;
- pour tout $T$, on a l'égalité
$$f(T)=\sum_{\Lambda\in i\mathcal{A}_0^*}e^{<\Lambda,T>}p_\Lambda(T).$$

La famille $(p_\Lambda)_{\Lambda\in i\mathcal{A}_0^*}$ est uniquement déterminée. Plus précisément, la connaissance de $f$ dans un ouvert non vide de $\mathcal{A}_0$ suffit à déterminer cette famille. En particulier, le polynôme $p_0$ est bien déterminé. On pose $c_0(f)=p_0(0)$.

Si $\Xi\subset i\mathcal{A}_0^*$ est un ensemble fini et $N$ est un entier naturel, on note plus précisément $PolExp_{\Xi,N}$ l'ensemble des $f\in PolExp$ tels que, avec les notations ci-dessus, le degré des $p_\Lambda$ soit inférieur ou égal à $N$ et $p_\Lambda$ soit nul si $\Lambda\notin\Xi$.

Si $F$ est non-archimédien, notons $PolExp$ l'ensemble des fonctions $f:\mathcal{A}_{M_0,F}\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{Q}\to\mathbb{C}$ qui vérifient la condition suivante. Pour tout réseau $\mathcal{R}\subset\mathcal{A}_{M_0,F}\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{Q}$, il existe une famille $(p_{\mathcal{R},\Lambda})_{\Lambda\in i\mathcal{A}_0^*/i\mathcal{R}^\vee}$ telle que

- l'ensemble des $\Lambda$ tels que $p_{\mathcal{R},\Lambda}\neq 0$ est fini ;
- pour tout $T\in\mathcal{R}$, on a l'égalité
$$f(T)=\sum_{\Lambda\in i\mathcal{A}_0^*/i\mathcal{R}^\vee}e^{<\Lambda,T>}p_{\mathcal{R},\Lambda}(T).$$

De nouveau, la famille $(p_{\mathcal{R},\Lambda})_{\Lambda\in i\mathcal{A}_0^*/i\mathcal{R}^\vee}$ est uniquement déterminée. Plus précisément, la connaissance de $f$ dans l'intersection de $\mathcal{A}_{M_0,F}\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{Q}$ et d'un cône ouvert non vide de $\mathcal{A}_0$ suffit à déterminer cette famille. On pose $c_{\mathcal{R},0}(f)=p_{\mathcal{R},0}(0)$.

Soit $\boldsymbol{\Xi}=(\Xi_{\mathcal{R}})_{\mathcal{R}}$ une famille indexée par les réseaux dans $\mathcal{A}_{M_0,F}\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{Q}$, où $\Xi_{\mathcal{R}}$ est un sous-ensemble fini de $i\mathcal{A}_0^*/i\mathcal{R}^\vee$. Soit $N$ un entier naturel. On note plus précisément $PolExp_{\boldsymbol{\Xi},N}$ l'ensemble des $f\in PolExp$ tels que, avec les notations ci-dessus et pour tout $\mathcal{R}$, le degré des $p_{\mathcal{R},\Lambda}$ soit inférieur ou égal à $N$ et que l'on ait $p_{\mathcal{R},\Lambda}=0$ si $\Lambda\notin\Xi_{\mathcal{R}}$.

Soient $M$ un Levi semi-standard, $\mathcal{Y}=(Y[P])_{P\in\mathcal{P}(M)}$ une famille $(G,M)$-orthogonale, $(\varphi(\Lambda,P))_{P\in\mathcal{P}(M)}$ une $(G,M)$-famille, $T\in\mathcal{A}_0$ et $X\in\mathcal{A}_{G,F}$. Dans le cas où $F$ est non-archimédien, on suppose que les deux familles sont $p$-adiques et que $T\in\mathcal{A}_{M_0,F}\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{Q}$. On déduit de $T$ une famille $(G,M)$-orthogonale $(T[P])_{P\in\mathcal{P}(M)}$, cf. 1.3. On définit la famille $\mathcal{Y}(T)=(Y[P]+T[P])_{P\in\mathcal{P}(M)}$. Elle est encore $(G,M)$-orthogonale, $p$-adique si $F$ est non-archimédien. On a défini dans le paragraphe précédent un terme $\varphi_M^{G,\mathcal{Y}(T)}(X;\Lambda)$. D'autre part, pour $P\in\mathcal{P}(M)$, posons $\varphi(\mathcal{Y};\Lambda,P)=\varphi(\Lambda,P)e^{<\Lambda,Y[P]^G>}$. La famille $(\varphi(\mathcal{Y};\Lambda,P))_{P\in\mathcal{P}(M)}$ est une $(G,M)$-famille. On a défini en 1.4 la fonction $\varphi_M^G(\mathcal{Y};\Lambda)$.

**Remarque.** On appliquera souvent ces constructions à la famille $\mathcal{Y}$ nulle, c'est-à-dire $Y[P]=0$ pour tout $P$. Dans ce cas on a $\varphi_M^G(\mathcal{Y};\Lambda)=\varphi_M^G(\Lambda)$ et on note simplement $\varphi_M^{G,T}(X;\Lambda)=\varphi_M^{G,\mathcal{Y}(T)}(X;\Lambda)$.

Supposons $F$ non-archimédien. Fixons une base de l'espace des opérateurs différentiels à coefficients constants sur $i\mathcal{A}_M^*$, de degré borné par $a_M-a_G$. Appelons norme de la $(G,M)$-famille $(\varphi(\Lambda,P))_{P\in\mathcal{P}(M)}$ le sup des $|D\varphi(\Lambda,P)|$, quand $\Lambda$ parcourt $i\mathcal{A}_{M,F}^*$, $P$ parcourt $\mathcal{P}(M)$ et $D$ parcourt la base fixée.

**Lemme**. *(i) Supposons $F$ archimédien. Pour tout $\Lambda_0\in i\mathcal{A}_M^*$, la fonction $f:T\mapsto\varphi_M^{G,\mathcal{Y}(T)}(X;\Lambda_0)$ appartient à $PolExp$. Plus précisément, il existe un entier $N$ et un sous-ensemble fini $\Xi\subset i\mathcal{A}_0^*$ ne dépendant que de $\Lambda_0$ tels que $f\in PolExp_{\Xi,N}$. On a*

$$c_0(f)=\begin{cases} e^{<\Lambda_0,X>}\varphi_M^G(\mathcal{Y};\Lambda_0), & \text{si } \Lambda_0\in i\mathcal{A}_G^*,\\ 0, & \text{sinon.}\end{cases}$$

*(ii) Supposons $F$ non-archimédien. Pour tout $\Lambda_0\in i\mathcal{A}_M^*$, la fonction $f:T\mapsto\varphi_M^{G,\mathcal{Y}(T)}(X;\Lambda_0)$ appartient à $PolExp$. Plus précisément, il existe un entier $N$ et une famille d'ensembles finis $\boldsymbol{\Xi}$ ne dépendant que de $\Lambda_0$ tels que $f\in PolExp_{\boldsymbol{\Xi},N}$. Soit $\mathcal{R}\subset\mathcal{A}_{M_0,F}\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{Q}$ un réseau. Si $\Lambda_0\notin i\mathcal{A}_{M,F}^\vee+i\mathcal{A}_G^*$, il existe un entier $k_1$ ne dépendant que de $\mathcal{R}$ tel que $c_{\frac{1}{k}\mathcal{R},0}(f)=0$ pour tout entier $k\geq k_1$. Supposons maintenant $\Lambda_0\in\Lambda_1+i\mathcal{A}_{M,F}^\vee$, où $\Lambda_1\in i\mathcal{A}_G^*$. Alors, il existe un réel $c>0$ ne dépendant que de $\mathcal{R}$ tel que, pour tout entier $k\geq 1$, on ait la majoration*

$$|c_{\frac{1}{k}\mathcal{R},0}(f)-mes(i\mathcal{A}_{M,F}^*)mes(i\mathcal{A}_{G,F}^*)^{-1}e^{<\Lambda_1,X>}\varphi_M^G(\mathcal{Y};\Lambda_1)|\leq cNk^{-1},$$

*où $N$ est la norme de la $(G,M)$-famille $(\varphi(\mathcal{Y};\Lambda,P))_{P\in\mathcal{P}(M)}$.*

Preuve. Rappelons comment on calcule un terme tel que $\varphi_M^G(\Lambda_0)$. Pour tout $P\in\mathcal{P}(M)$, notons $\Delta_P(\Lambda_0)$ l'ensemble des $\alpha\in\Delta_P$ tels que $<\Lambda_0,\check{\alpha}>=0$. Notons $n_P(\Lambda_0)$ le nombre d'éléments de cet ensemble. On fixe un élément $\xi\in i\mathcal{A}_M^{G,*}$ en position générale. Pour $t\in\mathbb{R}$, posons

$$\varphi(t,\Lambda_0,P)=\varphi(\Lambda_0+t\xi,P)\left(\prod_{\alpha\in\Delta_P-\Delta_P(\Lambda_0)}<\Lambda_0+t\xi,\check{\alpha}>^{-1}\right)\left(\prod_{\alpha\in\Delta_P(\Lambda_0)}<\xi,\check{\alpha}>^{-1}\right).$$

Cette fonction est $C^\infty$ en $t=0$. Alors

$$(1)\qquad \varphi_M^G(\Lambda_0)=mes(\mathcal{A}_M^G/\mathbb{Z}[\check{\Delta}_M])\sum_{P\in\mathcal{P}(M)}(n_P(\Lambda_0)!)^{-1}\left(\frac{d^{n_P(\Lambda_0)}}{dt^{n_P(\Lambda_0)}}\varphi(t,\Lambda_0,P)\right)_{t=0}.$$

Cela résulte simplement de l'égalité

$$\varphi_M^G(\Lambda_0)=lim_{t\to 0}\sum_{P\in\mathcal{P}(M)}\varphi(\Lambda_0+t\xi,P)\epsilon_P^G(\Lambda_0+t\xi).$$

Preuve de (i). On a dit en 1.6 que l'on avait l'égalité $f(T)=e^{<\Lambda,X>}\varphi_M^G(\mathcal{Y}(T);\Lambda_0)$. La formule (1) montre que $\varphi_M^G(\mathcal{Y}(T);\Lambda_0)$ est combinaison linéaire de termes $D\varphi(\mathcal{Y}(T);\Lambda_0,P)$ où $P$ parcourt $\mathcal{P}(M)$ et $D$ parcourt les opérateurs différentiels sur $i\mathcal{A}_M^*$, à coefficients constants et de degré borné par $a_M-a_G$. Comme fonction de $T$, un tel terme est de la forme $e^{<\Lambda_0,T[P]^G>}p(T)$, où $p$ est un polynôme de degré inférieur ou égal à $a_M-a_G$. Cette fonction appartient à $PolExp$, donc $f$ aussi. Plus précisément, $f\in PolExp_{\Xi,a_M-a_G}$ où $\Xi=\{w\Lambda_0^G;w\in W^G\}$. Le coefficient $c_0(f)$ ne voit que les termes dont la partie exponentielle est triviale. Il n'y en a que si que si $\Lambda_0^G=0$. Supposons cette condition vérifiée. Alors toutes les exponentielles sont triviales et $c_0(f)$ est simplement $f(0)$. Mais on a $f(0)=e^{<\Lambda_0,X>}\varphi_M^G(\mathcal{Y};\Lambda_0)$. D'où (i).

Preuve de (ii). Soit $\mathcal{R}$ un réseau dans $\mathcal{A}_{M_0,F}\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{Q}$. On a défini en 1.5 des réseaux $\mathcal{L}_k$ pour tout entier $k\geq 1$. On peut fixer $k_0$ de sorte que $T[P]^G\in\mathcal{L}_{k_0}$ pour tout $T\in\mathcal{R}$. On a alors l'égalité 1.6(2) que l'on récrit

$$f(T)=[\mathcal{L}_{k_0}:\mathcal{A}_{M,F}^G]^{-1}e^{<\Lambda_0,X>}\sum_{\nu\in i\mathcal{A}_{M,F}^{G,\vee}}e^{-<\nu,(X')^G>}\varphi_M^G(\nu,\mathcal{Y}(T);\Lambda_0+\nu),$$

où, pour tout $P\in\mathcal{P}(M)$,

$$\varphi(\nu,\mathcal{Y}(T);\Lambda,P)=\varphi(\Lambda-\nu,P)e^{<\Lambda,Y[P]^G+T[P]^G>}v_{k_0}(\Lambda,P).$$

La somme en $\nu$ est finie. En appliquant (1), on obtient

$$(2)\qquad f(T)=mes(\mathcal{A}_M^G/\mathbb{Z}[\check{\Delta}_M])[\mathcal{L}_{k_0}:\mathcal{A}_{M,F}^G]^{-1}e^{<\Lambda_0,X>}\sum_{\nu\in i\mathcal{A}_{M,F}^{G,\vee}}e^{-<\nu,(X')^G>}$$

$$\sum_{P\in\mathcal{P}(M)}(n_P(\Lambda_0+\nu)!)^{-1}\left(\frac{d^{n_P(\Lambda_0+\nu)}}{dt^{n_P(\Lambda_0+\nu)}}\varphi(\nu,\mathcal{Y}(T);t,\Lambda_0+\nu,P)\right)_{t=0}.$$

Comme dans le cas archimédien une fonction

$$T\mapsto\left(\frac{d^{n_P(\Lambda_0+\nu)}}{dt^{n_P(\Lambda_0+\nu)}}\varphi(\nu,\mathcal{Y}(T);t,\Lambda_0+\nu,P)\right)_{t=0}$$

est produit de $e^{<\Lambda_0+\nu,T[P]^G>}$ et d'un polynôme en $T$ de degré inférieur ou égal à $a_M-a_G$. Une telle fonction appartient à $PolExp$, donc la fonction $f$ appartient aussi à cet espace. Plus précisément, $f\in PolExp_{\boldsymbol{\Xi},a_M-a_G}$, où $\boldsymbol{\Xi}=(\Xi_{\mathcal{R}})_{\mathcal{R}}$ est la famille telle que $\Xi_{\mathcal{R}}$ soit l'ensemble des projections dans $i\mathcal{A}_0^*/i\mathcal{R}^\vee$ des $w(\Lambda_0^G+\nu)$ pour $w\in W^G$ et $\nu\in i\mathcal{A}_{M,F}^{G,\vee}$. Pour tout $P\in\mathcal{P}(M)$, notons $\mathcal{S}(P)$ l'image de $\mathcal{R}$ par l'application $T\mapsto T[P]^G$. C'est un réseau de $\mathcal{A}_M^G$. Le coefficient $c_{\mathcal{R},0}(f)$ sélectionne les termes de la formule (2) pour lesquels les exponentielles sont triviales pour tout $T \in \mathcal{R}$, c'est-à-dire les couples $(\nu, P)$ tels que $\Lambda_0^G + \nu \in i\mathcal{S}(P)^\vee$. Supposons $\Lambda_0 \notin i\mathcal{A}_{M,F}^\vee + i\mathcal{A}_G^* = i\mathcal{A}_{M,F}^{G,\vee} \oplus i\mathcal{A}_G^*$. Si $\mathcal{R}$ est assez grand, on a $\mathcal{S}(P)^\vee \subset \mathcal{A}_{M,F}^{G,\vee}$ pour tout $P$ et aucun $\nu \in i\mathcal{A}_{M,F}^{G,\vee}$ ne contribue. Donc $c_{\mathcal{R},0}(f) = 0$ ce qui prouve la première assertion du (ii). Supposons maintenant $\Lambda_0 \in \Lambda_1 + i\mathcal{A}_{M,F}^\vee$, où $\Lambda_1 \in i\mathcal{A}_G^*$. On a les égalités

$$\varphi_M^{G,\mathcal{Y}(T)}(X;\Lambda_0) = \varphi_M^{G,\mathcal{Y}(T)}(X;\Lambda_1) = e^{<\Lambda_1,X>}(\varphi')_M^{G,\mathcal{Y}(T)}(X;0),$$

où $(\varphi'(\Lambda,P))_{P\in\mathcal{P}(M)}$ est la $(G,M)$-famille déduite de la famille initiale par translation par $\Lambda_1$. Cela nous ramène au cas où $\Lambda_0 = 0$, ce que l'on suppose désormais. Le calcul précédent conduit à l'égalité

$$c_{\mathcal{R},0}(f) = mes(\mathcal{A}_M^G/\mathbb{Z}[\check{\Delta}_M])[\mathcal{L}_{k_0} : \mathcal{A}_{M,F}^G]^{-1} \sum_{P\in\mathcal{P}(M)}$$

$$\sum_{\nu\in i\mathcal{S}(P)^\vee} e^{-<\nu,(X')^G>}(n_P(\nu)!)^{-1}\left(\frac{d^{n_P(\nu)}}{dt^{n_P(\nu)}}\varphi(\nu,\mathcal{Y};t,\nu,P)\right)_{t=0}.$$

Remplaçons $\mathcal{R}$ par $\frac{1}{k}\mathcal{R}$. Cela remplace $\mathcal{S}(P)^\vee$ par $k\mathcal{S}(P)^\vee$. On remarque que $\Delta_P(k\nu) = \Delta_P(\nu)$ et $n_P(k\nu) = n_P(\nu)$. On peut remplacer l'entier $k_0$ par $kk_0$. On peut choisir $u_{kk_0}(\Lambda,P) = u_{k_0}(\frac{\Lambda}{k},P)$. Alors $v_{kk_0}(\Lambda,P) = k^{a_M-a_G}v_{k_0}(\frac{\Lambda}{k},P)$. Puisqu'on a aussi

$$[\mathcal{L}_{kk_0} : \mathcal{A}_{M,F}^G] = k^{a_M-a_G}[\mathcal{L}_{k_0} : \mathcal{A}_{M,F}^G],$$

l'égalité ci-dessus devient

$$(3) \qquad c_{\frac{1}{k}\mathcal{R},0}(f) = mes(\mathcal{A}_M^G/\mathbb{Z}[\check{\Delta}_M])[\mathcal{L}_{k_0} : \mathcal{A}_{M,F}^G]^{-1} \sum_{P\in\mathcal{P}(M)}$$

$$\sum_{\nu\in i\mathcal{S}(P)^\vee} e^{-<k\nu,(X')^G>}(n_P(\nu)!)^{-1}\left(\frac{d^{n_P(\nu)}}{dt^{n_P(\nu)}}f_k(t,\nu,P)\right)_{t=0},$$

où

$$f_k(t,\nu,P) = \varphi(t\xi,P)e^{<k\nu+t\xi,Y[P]^G>}v_{k_0}(\nu+\frac{t}{k}\xi,P)\left(\prod_{\alpha\in\Delta_P-\Delta_P(\nu)} < k\nu+t\xi,\check{\alpha} >^{-1}\right)$$

$$\left(\prod_{\alpha\in\Delta_P(\nu)} < \xi,\check{\alpha} >^{-1}\right).$$

Notons que puisque $v_{k_0}(\Lambda,P)$ est à support compact, la somme est limitée à un ensemble fini indépendant de $k$. Fixons $\nu$ et $P$. Si $k$ est assez grand, on a $e^{-<k\nu,(X')^G>} = e^{<k\nu,Y[P]^G>} = 1$ et ces termes disparaissent. Dans la définition de $f_k(t,\nu,P)$, le produit $\varphi(t\xi,P)e^{<k\nu+t\xi,Y[P]^G>}$ devient $\varphi(\mathcal{Y};t\xi,P)$. Le terme $\left(\frac{d^{n_P(\nu)}}{dt^{n_P(\nu)}}f_k(t,\nu,P)\right)_{t=0}$ est combinaison linéaire de produits

$$\left(\frac{d^a}{dt^a}\varphi(\mathcal{Y};t\xi,P)\right)_{t=0}\left(\frac{d^b}{dt^b}v_{k_0}(\nu+\frac{t}{k}\xi,P)\right)_{t=0}\left(\frac{d^c}{dt^c}\prod_{\alpha\in\Delta_P-\Delta_P(\nu)} < k\nu+t\xi,\check{\alpha} >^{-1}\right)_{t=0}$$

pour des entiers naturels $a, b, c$ tels que $a + b + c = n_P(\nu)$. On voit qu'un tel produit est borné par $CNk^{-m}$, où $N$ est la norme de la $(G, M)$-famille $(\varphi(\mathcal{Y}; \Lambda, P))_{P\in\mathcal{P}(M)}$, $C$ ne dépend que de $m$ et $v_{k_0}$, et $m = b + c + |\Delta_P - \Delta_P(\nu)|$. Les termes pour lesquels $m$ est strictement positif sont négligeables pour la conclusion du lemme. Si $\nu \neq 0$, on a $\Delta_P \neq \Delta_P(\nu)$ et tous les termes sont donc négligeables. Pour $\nu = 0$, on ne conserve que les termes où les dérivations ne s'appliquent qu'à la fonction $\varphi(\mathcal{Y}; t\xi, P)$. Si on élimine les termes négligeables, le membre de droite de (3) devient

$$mes(\mathcal{A}_M^G/\mathbb{Z}[\check{\Delta}_M])[\mathcal{L}_{k_0} : \mathcal{A}_{M,F}^G]^{-1} \sum_{P\in\mathcal{P}(M)} v_{k_0}(0, P)n!^{-1} \left(\frac{d^n}{dt^n}\varphi(\mathcal{Y}; t\xi, P)\right)_{t=0} \prod_{\alpha\in\Delta_P} < \xi, \check{\alpha} >^{-1},$$

où $n = a_M - a_G$. On va montrer que

(4) on a l'égalité $[\mathcal{L}_{k_0} : \mathcal{A}_{M,F}^G]^{-1} v_{k_0}(0, P) = mes(i\mathcal{A}_{M,F}^*)mes(i\mathcal{A}_{G,F}^*)^{-1}$.

En admettant cette relation et en utilisant (1), l'expression ci-dessus n'est autre que $\varphi_M^G(\mathcal{Y}; 0)$ et on obtient la conclusion de (ii).

Il reste à prouver (4). Pour $\nu \in i\mathcal{L}_{k_0}^\vee$, $\nu \neq 0$, la fonction $t \mapsto \epsilon_{P,\mathcal{L}_{k_0}}^G(\nu + t\xi)$ a un pôle d'ordre $n = a_M - a_G$ en $t = 0$. La fonction $t \mapsto \epsilon_P^G(\nu + t\xi)^{-1}$ a un zéro d'ordre strictement inférieur. Puisque $v_{k_0}(\nu + t\xi, P) = u_{k_0}(\nu + t\xi, P)\epsilon_{P,\mathcal{L}_{k_0}}^G(\nu + t\xi)\epsilon_P^G(\nu + t\xi)^{-1}$ est régulière, on a nécessairement $u_{k_0}(\nu, P) = 0$. Puisque $\sum_{\nu\in i\mathcal{L}_{k_0}^\vee} u_{k_0}(\nu, P) = 1$, on en déduit $u_{k_0}(0, P) = 1$. On calcule alors

$$v_{k_0}(0, P) = mes(\mathcal{A}_M^G/\mathbb{Z}[\check{\Delta}_M])^{-1} \lim_{\Lambda\to 0} \prod_{\alpha\in\Delta_P} \frac{< \Lambda, \check{\alpha} >}{1 - e^{-<\Lambda,\kappa\check{\alpha}>}} = mes(\mathcal{A}_M^G/\mathbb{Z}[\check{\Delta}_M])^{-1}\kappa^{-n},$$

où $\kappa = \frac{1}{k_0}log(q)$. Or $\mathcal{L}_{k_0} = \kappa\mathbb{Z}[\check{\Delta}_M]$, d'où

$$\kappa^n mes(\mathcal{A}_M^G/\mathbb{Z}[\check{\Delta}_M]) = mes(\mathcal{A}_M^G/\kappa\mathbb{Z}[\check{\Delta}_M]) = mes(\mathcal{A}_M^G/\mathcal{L}_{k_0}).$$

D'après les relations de compatibilité de nos mesures, on a

$$mes(\mathcal{A}_M^G/\mathcal{A}_{M,F}^G) = mes(i\mathcal{A}_{M,F}^*)^{-1}mes(i\mathcal{A}_{G,F}^*),$$

d'où $mes(\mathcal{A}_M^G/\mathcal{L}_{k_0}) = [\mathcal{L}_{k_0} : \mathcal{A}_{M,F}^G]^{-1}mes(i\mathcal{A}_{M,F}^*)^{-1}mes(i\mathcal{A}_{G,F}^*)$. En assemblant ces calculs, on obtient (4). □

## 1.8 $(G, M)$-familles et inversion de Fourier

Soient $M$ un Levi semi-standard et $X$ un élément de $\mathcal{A}_{G,F}$. Appliquons les constructions du paragraphe 1.6 à la famile $\mathcal{Y} = (Y[P])_{P\in\mathcal{P}(M)}$ nulle, c'est-à-dire $Y[P] = 0$ pour tout $P$, et à la famille $(\varphi(\Lambda, P))_{P\in\mathcal{P}(M)}$ formée des fonctions constantes égales à 1. On en déduit une fonction que l'on note

$$\epsilon_M^{G,0}(X; \Lambda) = \sum_{P\in\mathcal{P}(M)} \epsilon_P^{G,0}(X; \Lambda).$$

On a l'égalité

$$(1) \qquad \epsilon_M^{G,0}(X; \Lambda) = \begin{cases} e^{<\Lambda,X>}, & \text{si } F \text{ est non-archimédien et } X \in \mathcal{A}_{M,F} \cap \mathcal{A}_G, \\ & \text{ou si } F \text{ est archimédien et } M = G, \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

.

Preuve. On peut fixer un élément $P_1 \in \mathcal{P}(M)$ et supposer $<\Lambda, \check{\alpha}>> 0$ pour tout $\alpha \in \Delta_{P_1}$. En utilisant 1.5(2), on a

$$\epsilon_M^{G,0}(X;\Lambda) = \sum_{P\in\mathcal{P}(M)} (-1)^{s(P,P_1)} \epsilon_{P,P_1}^{G,0}(X;\Lambda)$$

$$= \sum_{P\in\mathcal{P}(M)} (-1)^{s(P,P_1)} \int_{\mathcal{A}_{M,F}^G(X)} \phi_{P,P_1}^G(H) e^{<\Lambda,H>}\, dH$$

$$= \int_{\mathcal{A}_{M,F}^G(X)} e^{<\Lambda,H>} \sum_{P\in\mathcal{P}(M)} (-1)^{s(P,P_1)} \phi_{P,P_1}^G(H) dH.$$

D'après 1.3(7), la somme intérieure est égale à $\Gamma_M^G(H,\mathcal{Y})$, où $\mathcal{Y}$ est la famille nulle. Ce n'est autre que $\delta_M^G(H)$. Si $F$ est archimédien et $M \neq G$, l'intégrale est nulle. Si $F$ est non archimédien, elle vaut $e^{<\Lambda,X>}$ s'il existe $H \in \mathcal{A}_{M,F}^G(X)$ avec $H^G = 0$ et elle vaut 0 sinon. Cette condition équivaut à $X \in \mathcal{A}_{M,F} \cap \mathcal{A}_G$. $\square$

Soit $T$ un élément de $\mathcal{A}_0$ et soit $(\varphi(\Lambda,P))_{P\in\mathcal{P}(M)}$ une $(G,M)$-famille. Dans le cas où $F$ est non-archimédien, on suppose que $T \in \mathcal{A}_{M_0,F} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ et que la $(G,M)$-famille est $p$-adique. Dans le cas archimédien, on suppose que les fonctions $\Lambda \mapsto \varphi(\Lambda,P)$ sont de Schwartz. Pour un sous-groupe parabolique $Q = LU_Q \in \mathcal{F}(M)$, on définit $\varphi(\Lambda,Q)$ pour $\Lambda \in i\mathcal{A}_{L,F}^*$ comme la restriction à $i\mathcal{A}_{L,F}^*$ de $\varphi(\Lambda,P)$ pour n'importe quel $P \in \mathcal{P}(M)$ tel que $P \subset Q$. On définit sa transformée de Fourier $\hat{\varphi}(H,Q)$, qui est une fonction de $H \in \mathcal{A}_{L,F}$, par

$$\hat{\varphi}(H,Q) = mes(i\mathcal{A}_{L,F}^*)^{-1} \int_{i\mathcal{A}_{L,F}^*} \varphi(\Lambda,Q) e^{-<\Lambda,H>}\, d\Lambda.$$

C'est une fonction de Schwartz sur $\mathcal{A}_{L,F}$.

**Lemme**. *L'expression*

$$\sum_{Q=LU_Q\in\mathcal{F}(M)} \int_{\mathcal{A}_{L,F}} \int_{\mathcal{A}_{M,F}^G(X+H_G)} \delta_M^Q(H')\Gamma_Q^G(H',H+T[Q])\hat{\varphi}(H,Q) e^{<\Lambda,H'>}\, dH'\, dH$$

*est convergente et égale à* $\varphi_M^{G,T}(X;\Lambda)$.

Preuve. La condition $\Gamma_Q^G(H',H+T[Q]) \neq 0$ implique une majoration $|(H')_L^G| << 1+|H^G|$ ($T$ est ici considéré comme une constante). Jointe aux conditions $\delta_M^Q(H') = 1$ et $H'_G - H_G = X$, cela implique $|H'| << 1+|H|$. L'intégrale en $H'$ est donc essentiellement bornée par $(1+|H|)^D$ pour un entier $D$ convenable. Puisque $H \mapsto \hat{\varphi}(H,Q)$ est de Schwartz, l'intégrale en $H$ est convergente. Cela prouve la convergence énoncée.

Rappelons que, pour $\Lambda$ en position générale,

$$\varphi_M^{G,T}(X;\Lambda) = \sum_{P\in\mathcal{P}(M)} \varphi(\Lambda,P)\epsilon_P^{G,T[P]}(X;\Lambda).$$

Fixons $P$. Par inversion de Fourier

$$\varphi(\Lambda,P) = \int_{\mathcal{A}_{M,F}} \hat{\varphi}(H,P) e^{<\Lambda,H>}\, dH.$$

On va prouver l'égalité

$$(2)\qquad \epsilon_P^{G,T[P]}(X;\Lambda)e^{<\Lambda,H>}=\sum_{Q=LU_Q;P\subset Q}\int_{\mathcal{A}_{L,F}^G(X+H_G)}\Gamma_Q^G(H',H+T[Q])\epsilon_P^{Q,0}(H';\Lambda)\,dH'.$$

En admettant cela, on obtient

$$\varphi_M^{G,T}(X;\Lambda)=\sum_{P\in\mathcal{P}(M)}\int_{\mathcal{A}_{M,F}}\hat{\varphi}(H,P)\epsilon_P^{G,T[P]}(X;\Lambda)e^{<\Lambda,H>}\,dH$$

$$=\sum_{P\in\mathcal{P}(M)}\int_{\mathcal{A}_{M,F}}\hat{\varphi}(H,P)\sum_{Q=LU_Q;P\subset Q}\int_{\mathcal{A}_{L,F}^G(X+H_G)}\Gamma_Q^G(H',H+T[Q])\epsilon_P^{Q,0}(H';\Lambda)\,dH'\,dH.$$

Cette expression est absolument convergente pour $\Lambda$ en position générale pour les mêmes raisons que ci-dessus, la fonction $H'\mapsto\epsilon_P^{Q,0}(H';\Lambda)$ étant bornée. On sort la somme en $Q$ des intégrales et on la permute avec celle en $P$. On obtient

$$\varphi_M^{G,T}(X;\Lambda)=\sum_{Q=LU_Q\in\mathcal{F}(M)}\sum_{P\in\mathcal{P}(M);P\subset Q}\int_{\mathcal{A}_{M,F}}\hat{\varphi}(H,P)$$

$$\int_{\mathcal{A}_{L,F}^G(X+H_G)}\Gamma_Q^G(H',H+T[Q])\epsilon_P^{Q,0}(H';\Lambda)\,dH'\,dH.$$

On remarque que $H$ n'intervient que par sa projection $H_L$ dans l'intégrale intérieure. Décomposons la première intégrale en une intégrale sur $H\in\mathcal{A}_{L,F}$ et une intégrale sur $\mathcal{A}_{M,F}^L(H)$. On obtient

$$(3)\qquad \varphi_M^{G,T}(X;\Lambda)=\sum_{Q=LU_Q\in\mathcal{F}(M)}\sum_{P\in\mathcal{P}(M);P\subset Q}\int_{\mathcal{A}_{L,F}}\int_{\mathcal{A}_{M,F}^L(H)}\hat{\varphi}(H'',P)$$

$$\int_{\mathcal{A}_{L,F}^G(X+H_G)}\Gamma_Q^G(H',H+T[Q])\epsilon_P^{Q,0}(H';\Lambda)\,dH'\,dH''\,dH.$$

On voit apparaître l'intégrale

$$\int_{\mathcal{A}_{M,F}^L(H)}\hat{\varphi}(H'',P)\,dH''.$$

Par inversion de Fourier, ceci n'est autre que

$$mes(i\mathcal{A}_{L,F}^*)^{-1}\int_{i\mathcal{A}_{L,F}^*}\varphi(\Lambda,P)e^{-<\Lambda,H>}\,d\Lambda.$$

Puisque le domaine d'intégration est restreint à $i\mathcal{A}_{L,F}^*$, on peut aussi bien remplacer $\varphi(\Lambda,P)$ par $\varphi(\Lambda,Q)$. L'intégrale ci-dessus devient $\hat{\varphi}(H,Q)$, en particulier est indépendante de $P$. Dans la formule (3), la somme en $P$ ne porte plus que sur les termes $\epsilon_P^{Q,0}(H';\Lambda)$. Leur somme vaut $\epsilon_M^{Q,0}(H';\Lambda)$. Supposons $F$ non archimédien. L'égalité (1) dit que $\epsilon_M^{Q,0}(H';\Lambda)$ vaut $e^{<\Lambda,X>}$ si $H'\in\mathcal{A}_{M,F}$, 0 sinon. La formule (3) devient

$$\varphi_M^{G,T}(X;\Lambda)=\sum_{Q=LU_Q\in\mathcal{F}(M)}\int_{\mathcal{A}_{L,F}}\int_{\mathcal{A}_{L,F}^G(X+H_G)\cap\mathcal{A}_{M,F}}\Gamma_Q^G(H',H+T[Q])\hat{\varphi}(H,Q)e^{<\Lambda,H'>}\,dH'\,dH.$$

Mais $\mathcal{A}_{L,F}^G(X+H_G)\cap\mathcal{A}_{M,F}$ est l'ensemble des $H'\in\mathcal{A}_{M,F}^G(X+H_G)$ tels que $\delta_M^Q(H')=1$. La formule ci-dessus est donc équivalente à celle de l'énoncé. Supposons maintenant $F$ archimédien. L'égalité (1) transforme directement la formule (3) en celle de l'énoncé, à ceci près que l'on ne somme que sur les $Q\in\mathcal{P}(M)$. Mais si $Q\notin\mathcal{P}(M)$, le support de la fonction $\delta_M^Q$ est de mesure nulle et la contribution de $Q$ à la formule de l'énoncé est nulle.

Prouvons (2). Puisqu'il s'agit de fonctions méromorphes en $\Lambda$, on peut supposer $Re<\Lambda,\check{\alpha}>>0$ pour tout $\alpha\in\Delta_P$. Alors

$$\epsilon_P^{G,T}(X;\Lambda)e^{<\Lambda,H>}=\int_{\mathcal{A}_{M,F}^G(X)}\phi_P^G(H'-T)e^{<\Lambda,H'+H>}\,dH'$$

$$=\int_{\mathcal{A}_{M,F}^G(X+H_G)}\phi_P^G(H'-H-T)e^{<\Lambda,H'>}\,dH'.$$

On utilise 1.3(3), d'où

$$\epsilon_P^{G,T}(X;\Lambda)=\int_{\mathcal{A}_{M,F}^G(X+H_G)}\sum_{Q=LU_Q;P\subset Q}\Gamma_Q^G(H',H+T)\phi_P^Q(H')e^{<\Lambda,H'>}\,dH'.$$

On sort la somme en $Q$ de l'intégrale et on décompose celle-ci en une intégrale sur $H'\in\mathcal{A}_{L,F}^G(X+H_G)$ et une intégrale sur $H''\in\mathcal{A}_{M,F}^L(H')$. On obtient

$$\epsilon_P^{G,T}(X;\Lambda)=\sum_{Q=LU_Q;P\subset Q}\int_{\mathcal{A}_{L,F}^G(X+H_G)}\Gamma_Q^G(H',H+T)\int_{\mathcal{A}_{M,F}^L(H')}\phi_P^Q(H'')e^{<\Lambda,H''>}\,dH''\,dH'.$$

La dernière intégrale n'est autre que $\epsilon_P^{Q,0}(H';\Lambda)$ et on obtient la formule (2). $\square$

## 1.9 Représentations

Si $\pi$ est une représentation admissible de $G(F)$ et si $F$ est non-archimédien, on note $V_\pi$ un espace dans lequel elle se réalise. Dans le cas où $F$ est archimédien, pour être correct, il faudrait introduire deux espaces : un espace dans lequel $\pi$ se réalise et le sous-espace des vecteurs $K$-finis, qui est celui qui nous intéresse mais qui n'est pas invariant par l'action de $G(F)$. Pour simplifier, on n'introduit que ce dernier, que l'on note $V_\pi$, et on convient qu'il est plongé dans un espace implicite plus gros où $\pi$ se réalise. Si $\pi$ est irréductible et unitaire, on fixe un produit hermitien $(.,.)$ sur $V_\pi$ invariant par $\pi(g)$ pour tout $g\in G(F)$ (avec la convention ci-dessus dans le cas archimédien). Pour nous, un tel produit est linéaire en la seconde variable et antilinéaire en la première. On note $\Pi_{disc}(G(F))$ l'ensemble des classes de représentations irréductibles de la série discrète de $G(F)$. Pour $\sigma\in\Pi_{disc}(G(F))$, son degré formel $d(\sigma)$ est défini par l'égalité

$$\int_{A_G(F)\backslash G(F)}(e_1,\sigma(g)e_2)(\sigma(g)e_1',e_2')\,dg\;=d(\sigma)^{-1}(e_1,e_2')(e_1',e_2)$$

pour tous $e_1,e_2,e_1',e_2'\in V_\sigma$.

Le groupe $\mathcal{A}_{G,\mathbb{C}}^*$ agit sur l'ensemble des classes d'isomorphisme de représentations admissibles de $G(F)$ : à une représentation $\pi$ et à $\lambda\in\mathcal{A}_{G,\mathbb{C}}^*$, on associe la représentation $\pi_\lambda$ définie par $\pi_\lambda(g)=e^{<\lambda,H_G(g)>}\pi(g)$. Cette action se quotiente en une action de

$\mathcal{A}^*_{G,\mathbb{C}}/i\mathcal{A}^\vee_{G,F}$. Pour deux représentations $\pi, \pi'$, considérons l'ensemble des $\lambda \in i\mathcal{A}^*_G$ tels que $\pi \simeq \pi'_{-\lambda}$. Il est stable par $i\mathcal{A}^\vee_{G,F}$ agissant par addition et on note $[\pi, \pi']$ son quotient par cette action. Si $\pi = \pi'$, c'est un groupe et il est plus suggestif de le noter $Stab(i\mathcal{A}^*_{G,F}, \pi)$. Ce groupe ne dépend que de l'orbite de $\pi$ pour l'action de $i\mathcal{A}^*_{G,F}$. L'action du groupe $i\mathcal{A}^*_{G,F}$ conserve l'ensemble $\Pi_{disc}(G(F))$. On note $\Pi_{disc}(G(F))/i\mathcal{A}^*_{G,F}$ l'ensemble des orbites.

Soit $P = MU_P$ un sous-groupe parabolique semi-standard de $G$ et soit $\sigma$ une représentation admissible de $M(F)$. Pour $\lambda \in \mathcal{A}^*_{M,\mathbb{C}}/i\mathcal{A}^\vee_{M,F}$, introduisons la représentation induite $\pi_\lambda = Ind_P^G(\sigma_\lambda)$ de $G(F)$. Elle se réalise naturellement dans un espace $V_{\pi_\lambda}$ de fonctions $e : G(F) \to V_\sigma$ se transformant à gauche par $P(F)$ selon la formule usuelle. On définit l'espace $V_{\sigma,P}$ des fonctions $e : K \to V_\sigma$ telles que

- $e(muk) = \sigma(m)e(k)$ pour tous $m \in M(F) \cap K$, $u \in U(F) \cap K$, $k \in K$ ;
- si $F$ est non archimédien, $e$ est localement constante ;
- si $F$ est archimédien, $e$ est lisse et $K$-finie.

Par l'homomorphisme $V_{\pi_\lambda} \to V_{\sigma,P}$ de restriction à $K$, $\pi_\lambda$ se réalise dans $V_{\sigma,P}$ pour tout $\lambda$. Supposons $\sigma$ irréductible et unitaire. Si $\lambda \in i\mathcal{A}^*_{M,F}$, $\pi_\lambda$ est unitaire. Plus précisément, $\pi_\lambda$ conserve le produit hermitien sur $V_{\sigma,P}$ défini par

$$(e_1, e_2) = \int_K (e_1(k), e_2(k))\, dk.$$

Revenons à $\sigma$ admissible et $\lambda \in \mathcal{A}^*_{M,\mathbb{C}}/i\mathcal{A}^\vee_{M,F}$. Soit $P' = MU_{P'} \in \mathcal{P}(M)$. Posons $\pi'_\lambda = Ind^G_{P'}(\sigma_\lambda)$. On définit l'opérateur d'entrelacement

$$J_{P'|P}(\sigma_\lambda) : V_{\sigma,P} \to V_{\sigma,P'}.$$

Modulo les isomorphismes

$$\begin{array}{ccccccc} V_{\sigma,P} & \to & V_{\pi_\lambda} & \quad & V_{\sigma,P'} & \to & V_{\pi'_\lambda} \\ e & \mapsto & e_\lambda & & e' & \mapsto & e'_\lambda, \end{array}$$

il existe un réel $c$ tel que, pour $Re(<\lambda, \check{\alpha}>) > c$ pour tout $\alpha \in \Delta_P$, cet opérateur soit donné par la formule

$$<\epsilon, (J_{P'|P}(\sigma_\lambda)(e))_\lambda(g)> = \int_{(U_P(F)\cap U_{P'}(F))\backslash U_{P'}(F)} <\epsilon, e_\lambda(ug)>\, du$$

pour tout $e \in V_{\sigma,P}$ et tout $\epsilon \in V_{\check{\sigma}}$, où $\check{\sigma}$ est la contragrédiente de $\sigma$. Il se prolonge méromorphiquement à tout $\mathcal{A}^*_{M,\mathbb{C}}/i\mathcal{A}^\vee_{M,F}$. Les opérateurs d'entrelacement vérifient de multiples propriétés, cf. par exemple [A3] paragraphe 1.

Soit $x \in G(F)$. Posons $M' = xMx^{-1}$, $P' = xPx^{-1}$ et supposons $M'$ semi-standard. On note $x\sigma$ la représentation $m' \mapsto \sigma(x^{-1}m'x)$ de $M'(F)$ dans $V_\sigma$. On note $\lambda \mapsto x\lambda$ l'application de $\mathcal{A}^*_{M,\mathbb{C}}$ dans $\mathcal{A}^*_{M',\mathbb{C}}$ déduite par fonctorialité de la conjugaison par $x$. Posons $\pi'_{x\lambda} = Ind^G_{P'}((x\sigma)_{x\lambda})$. On réalise $\pi_\lambda$ et $\pi'_{x\lambda}$ dans leurs modèles $V_{\pi_\lambda}$ et $V_{\pi'_{x\lambda}}$. Notons $\partial_P(x)$ le jacobien de l'application $ad_x : U_P \to U_{xPx^{-1}}$ (en fait, on peut écrire $x = m'k' = km$, avec $m' \in M'(F)$, $m \in M(F)$, $k, k' \in K$ ; on a $\partial_P(x) = \delta_P(m) = \delta_{P'}(m')$). Définissons l'opérateur

$$\gamma(x) : V_{\pi_\lambda} \to V_{\pi'_{x\lambda}}$$

par $(\gamma(x)e)(g) = \partial_P(x)^{1/2}e(x^{-1}g)$. Il vérifie la relation $\gamma(x) \circ \pi_\lambda(g) = \pi'_{x\lambda}(g) \circ \gamma(x)$.

Supposons $\sigma$ irréductible et unitaire et limitons-nous à $\lambda \in i\mathcal{A}^*_{M,F}$. En identifiant $V_{\pi_\lambda}$ à $V_{\sigma,P}$ et $V_{\pi'_{x\lambda}}$ à $V_{x\sigma,P'}$, ces espaces sont munis de produits hermitiens définis positifs pour lesquels les représentations $\pi_\lambda$ et $\pi'_{x\lambda}$ sont unitaires. Alors l'application $\gamma(x)$ est unitaire.

On appliquera ces constructions à des éléments du groupe de Weyl $W^G$. Soit $w \in W^G$. On choisit un représentant $\dot{w}$ de $w$ dans $K$. Le Levi $M' = w(M)$ est semi-standard. Par abus de notation, on pose simplement $w\sigma = \dot{w}\sigma$ et $\gamma(w) = \gamma(\dot{w})$. Notons que $\gamma(w)$, vu comme un opérateur de $V_{\sigma,P}$ dans $V_{w\sigma,w(P)}$, ne dépend pas de $\lambda$. On pourra aussi appliquer cette construction à des quotients tels que $W^G/W^M$. On pourra vérifier que nos formules ne dépendent pas des choix des relèvements $\dot{w}$.

## 1.10 Opérateurs normalisés

Soient $M$ un Levi semi-standard et $\sigma \in \Pi_{disc}(M(F))$. Pour $P \in \mathcal{P}(M)$, l'opérateur $J_{P|\bar{P}}(\sigma_\lambda) \circ J_{\bar{P}|P}(\sigma_\lambda)$ est une homothétie qui ne dépend pas de $P$. On définit $m^G(\sigma_\lambda)$ comme le produit du degré formel $d(\sigma)$ et de l'inverse du rapport de cette homothétie. Remarquons qu'en vertu des relations de compatibilité de nos mesures, $m^G(\sigma_\lambda)$ ne dépend que des mesures sur $G(F)$ et $A_M(F)$.

On introduit des opérateurs normalisés $R_{P'|P}(\sigma_\lambda)$ et des fonctions de normalisation $r_{P'|P}(\sigma_\lambda)$, pour $P, P' \in \mathcal{P}(M)$, comme en [A3] paragraphe 2. On a l'égalité $J_{P'|P}(\sigma_\lambda) = r_{P'|P}(\sigma_\lambda)R_{P'|P}(\sigma_\lambda)$. Pour $\lambda \in i\mathcal{A}^*_{M,F}$, $R_{P'|P}(\sigma_\lambda)$ est unitaire. On sait que, pour toute racine réduite $\alpha$ de $A_M$, on peut définir une fonction $r_\alpha(\sigma_\lambda)$ de sorte que

$$(1) \qquad r_{P'|P}(\sigma_\lambda) = \prod_{\alpha >_P 0, \alpha <_{P'} 0} r_\alpha(\sigma_\lambda),$$

la notation signifiant que $\alpha$ parcourt les racines réduites qui sont positives pour $P$ et négatives pour $P'$.

Il est utile de rappeler quelle est la forme des fonctions $r_\alpha(\sigma_\lambda)$ dans le cas où $F = \mathbb{R}$. Fixons un sous-tore fondamental $S$ de $M$. Son algèbre de Lie $\mathfrak{s}$ se décompose de façon unique en une somme directe $\mathfrak{a}_M \oplus \mathfrak{s}^M$ stable par l'action galoisienne. On pose $\mathfrak{h}_M = \mathfrak{a}_M(\mathbb{R})$, $\mathfrak{h}^M = i\mathfrak{s}^M(\mathbb{R})$, on définit l'algèbre de Lie réelle $\mathfrak{h} = \mathfrak{h}_M \oplus \mathfrak{h}^M$ et sa complexifiée $\mathfrak{h}_\mathbb{C}$. Remarquons que $\mathcal{A}_M$ s'identifie à $\mathfrak{h}_M$. A la série discrète $\sigma$ est associé un caractère infinitésimal qui est une orbite dans $i\mathfrak{h}^*$ pour l'action du groupe de Weyl absolu de $S$. Choisissons $\mu_\sigma$ dans cette orbite. On sait que la projection $\mu_\sigma^M$ de $\mu_\sigma$ sur $i\mathfrak{h}^{M,*}$ appartient à un réseau fixe de cet espace, plus précisément à un réseau de $(X^*(S) \otimes_\mathbb{Z} \mathbb{Q}) \cap i\mathfrak{h}^{M,*}$. Soit $\alpha$ une racine réduite de $A_M$. D'après [A3] paragraphe 3, pour un choix convenable du point $\mu_\sigma$, la fonction $r_\alpha(\sigma_\lambda)$ est produit d'une constante uniformément bornée (c'est-à-dire bornée indépendamment de $\sigma$ et $\lambda$), d'un nombre fini de fonctions

$$\frac{1}{< \mu_\sigma + \lambda, \check{\beta} >},$$

où $\check{\beta}$ est une coracine de $S$ se restreignant à $\mathfrak{h}_M$ en un multiple positif et non nul de $\check{\alpha}$, et, éventuellement, d'une fonction

$$\Gamma(\frac{< \mu_\sigma + \lambda, \check{\beta} > +N}{2})\Gamma(\frac{< \mu_\sigma + \lambda, \check{\beta} > +N+1}{2})^{-1}$$

où $\check{\beta}$ est une coracine de $S$ égale à un multiple positif et non nul de $\check{\alpha}$ et $N \in \{0, 1\}$.

On utilisera les propriétés suivantes, pour $\lambda \in i\mathcal{A}^*_{M,F}$.

(2) La fonction $\lambda \mapsto m^G(\lambda)$ est régulière, à croissance modérée et à valeurs positives ou nulles.

Les première et troisième propriétés sont dues à Harish-Chandra. La deuxième (qui ne concerne que le cas où $F$ est archimédien) résulte de la formule explicite [A3] proposition 3.1.

(3) On a l'égalité $r_{P|P'}(\sigma_\lambda) = \overline{r_{P'|P}(\sigma_\lambda)}$.

Cela résulte des relations d'adjonction vérifiées tant par les opérateurs d'entrelacement que par les opérateurs normalisés.

(4) On a l'égalité $|r_{\bar{P}|P}(\sigma_\lambda)|^2 = d(\sigma)m^G(\sigma_\lambda)^{-1}$.

Cela résulte de (3) et de la définition de $m^G(\sigma_\lambda)$.

(5) Pour $P, P' \in \mathcal{P}(M)$, la fonction

$$\lambda \mapsto r_{P|\bar{P}}(\sigma_\lambda) r_{P'|\bar{P}'}(\sigma_\lambda)^{-1}$$

est régulière de valeur absolue 1. Si $F$ est archimédien, ses dérivées sont à croissance modérée.

La première assertion résulte de (4). Pour la seconde, on peut supposer $F = \mathbb{R}$ car dans le cas où $F = \mathbb{C}$, les fonctions de normalisation sont les mêmes que pour le groupe sur $\mathbb{R}$ déduit de $G$ par restriction des scalaires. La décomposition (1) nous ramène à considérer une fonction $r_\alpha(\sigma_\lambda) r_{-\alpha}(\sigma_\lambda)^{-1}$, ou encore, d'après (3), $r_\alpha(\sigma_\lambda)\overline{r_\alpha(\sigma_\lambda)}^{-1}$. D'après ce que l'on a dit ci-dessus, une telle fonction est produit fini de termes

$$\frac{<\mu^M, \check{\beta}> - <\mu_M + \lambda, \check{\beta}>}{<\mu^M, \check{\beta}> + <\mu_M + \lambda, \check{\beta}>}$$

et éventuellement d'un terme

$$\frac{\Gamma(\frac{<\mu_M+\lambda,\check{\beta}>}{2})\Gamma(\frac{-<\mu_M+\lambda,\check{\beta}>+1}{2})}{\Gamma(\frac{-<\mu_M+\lambda,\check{\beta}>}{2})\Gamma(\frac{<\mu_M+\lambda,\check{\beta}>+1}{2})}.$$

C'est un simple exercice de montrer que les dérivées de telles fonctions sont à croissance modérée en $\lambda$.

(6) La fonction $\lambda \mapsto r_{P'|P}(\sigma_\lambda)^{-1}$ est régulière et à croissance modérée.

Par la décomposition (1), on peut supposer $P'$ et $P$ adjacents. Il y a alors un parabolique $Q = LU_Q \in \mathcal{F}(M)$, qui est minimal parmi les paraboliques contenant strictement $M$, de sorte que $P, P' \subset Q$ et $P' \cap L = \overline{P \cap L}$. Par les propriétés habituelles, $r_{P'|P}(\sigma_\lambda) = r^L_{\overline{P\cap L}|P\cap L}(\sigma_\lambda)$. Alors la propriété cherchée résulte de (2) et (4) appliquées au groupe $L$.

(7) Pour quatre éléments $P_1, P_2, P_3, P_4 \in \mathcal{P}(M)$, la fonction

$$\lambda \mapsto m^G(\sigma_\lambda) r_{P_1|P_2}(\sigma_\lambda) r_{P_3|P_4}(\sigma_\lambda)$$

est régulière et à croissance modérée.

On peut l'écrire comme produit de

$$r_{\bar{P}_2|P_1}(\sigma_\lambda)^{-1} r_{\bar{P}_4|P_3}(\sigma_\lambda)^{-1}$$

et de

$$m^G(\sigma_\lambda) r_{\bar{P}_2|P_2}(\sigma_\lambda) r_{\bar{P}_4|P_4}(\sigma_\lambda).$$

La première fonction vérifie les propriétés requises d'après (6). La seconde est de valeur absolue constante d'après (4).

## 1.11 $R$-groupes

Soient $M$ un Levi semi-standard et $\sigma$ une représentation irréductible de $M(F)$ de la série discrète. On note $\mathcal{N}^G(\sigma)$ l'ensemble des couples $(A,n)$ où $A$ est un automorphisme unitaire de $V_\sigma$ et $n \in Norm_{G(F)}(M)$ (le normalisateur de $M$ dans $G(F)$) qui vérifient la condition

$$A \circ n\sigma(x) = \sigma(x) \circ A$$

pour tout $x \in M(F)$. C'est un groupe pour le produit $(A,n)(A',n') = (AA',nn')$. Il y a un homomorphisme naturel $M(F) \to \mathcal{N}^G(\sigma)$ qui, à $x \in M(F)$, associe $(\sigma(m),m)$. L'image est un sous-groupe distingué de $\mathcal{N}^G(\sigma)$. On note $\mathcal{W}^G(\sigma)$ le quotient. On a une suite exacte

$$(1) \qquad 1 \to \mathbb{U} \to \mathcal{W}^G(\sigma) \to W^G(\sigma) \to 1,$$

où $\mathbb{U}$ est le groupe des nombres complexes de module 1 et

$$W^G(\sigma) = \{w \in W^G; w(M) = M, w\sigma \simeq \sigma\}/W^M.$$

Soit $P \in \mathcal{P}(M)$, posons $\pi = Ind_P^G(\sigma)$ que l'on réalise dans l'espace naturel $V_\pi$. Pour $(A,n) \in \mathcal{N}^G(\sigma)$, on définit l'automorphisme $r_P(A,n)$ de $V_\pi$ par $r_P(A,n) = R_{P|nPn^{-1}}(\sigma) \circ \gamma(n) \circ A$. Expliquons que $A$ désigne ici l'opérateur déduit de $A$ par fonctorialité, c'est-à-dire celui qui, à une fonction $e : G(F) \to V_\sigma$ associe la fonction $g \mapsto Ae(g)$. On vérifie que $r_P(A,n)$ est un entrelacement, c'est-à-dire que

$$r_P(A,n) \circ \pi(g) = \pi(g) \circ r_P(A,n)$$

pour tout $g \in G(F)$. On vérifie que l'application $r_P$ ainsi définie est une représentation unitaire de $\mathcal{N}^G(\sigma)$. Si on remplace $P$ par un autre $P' \in \mathcal{P}(M)$, les représentations $r_P$ et $r_{P'}$ sont équivalentes : on a $r_P(A,n) \circ R_{P|P'}(\sigma) = R_{P|P'}(\sigma) \circ r_{P'}(A,n)$. Le sous-groupe des $(A,n) \in \mathcal{N}^G(\sigma)$ tels que $r_P(A,n)$ soit l'identité de $V_\pi$ est donc indépendant de $P$. Il contient $M(F)$ (identifié comme ci-dessus à un sous-groupe de $\mathcal{N}^G(\sigma)$). On note $W_0^G(\sigma)$ le quotient de ce sous-groupe par $M(F)$. On pose

$$\mathcal{R}^G(\sigma) = \mathcal{W}^G(\sigma)/W_0^G(\sigma).$$

Par la suite (1), $W_0^G(\sigma)$ s'identifie à un sous-groupe distingué de $W^G(\sigma)$. On pose $R^G(\sigma) = W^G(\sigma)/W_0^G(\sigma)$. C'est le $R$-groupe de $\sigma$. On a une suite exacte

$$1 \to \mathbb{U} \to \mathcal{R}^G(\sigma) \to R^G(\sigma) \to 1.$$

La représentation $r_P$ se quotiente en une représentation de $\mathcal{R}^G(\sigma)$ telle que $z \in \mathbb{U}$ agisse par l'homothétie de rapport $z$.

**Dans la suite, toutes les représentations de $\mathcal{R}^G(\sigma)$ seront supposées vérifier cette condition.**

On note $Irr(\mathcal{R}^G(\sigma))$ l'ensemble des classes d'isomorphisme de représentations irréductibles de $\mathcal{R}^G(\sigma)$. Le résultat principal de la théorie du $R$-groupe est qu'il existe une bijection $\rho \mapsto \pi_\rho$ de $Irr(\mathcal{R}^G(\sigma))$ sur l'ensemble des classes de représentations irréductibles de $G(F)$ qui sont des sous-représentations de $\pi$, de sorte que la représentation $r_P \otimes \pi$ de $\mathcal{R}^G(\sigma) \times G(F)$ dans $V_\pi$ se décompose en

$$(2) \qquad \oplus_{\rho \in Irr(\mathcal{R}^G(\sigma))} \rho \otimes \pi_\rho.$$

Notons que la correspondance $\rho \mapsto \pi_\rho$ ne dépend pas de $P$ : si on remplace $P$ par $P'$, l'opérateur $R_{P|P'}(\sigma)$ entrelace les représentations de $\mathcal{R}^G(\sigma) \times G(F)$ dans $V_\pi$ et dans $V_{\pi'}$, où $\pi' = Ind_{P'}^G(\sigma)$.

Harish-Chandra a décrit les groupes $W_0^G(\sigma)$ et $R^G(\sigma)$. Soit $\alpha$ une racine réduite de $A_M$ dans $G$. Il lui est associé un groupe de Levi $M_\alpha \in \mathcal{L}(M)$ qui est minimal dans $\mathcal{L}(M) - \{M\}$. Suposons que la mesure de Plancherel $m^{M_\alpha}(\sigma)$ soit nulle. On montre qu'alors $W^{M_\alpha}(M)$ a deux éléments : l'identité et une symétrie $s_\alpha$. L'ensemble des $\alpha$ vérifiant les conditions ci-dessus forme un système de racines et $W_0^G(\sigma)$ est le groupe de Weyl de ce système. En particulier, $W_0^G(\sigma)$ est engendré par ces symétries $s_\alpha$. Fixons un ensemble de racines positives dans ce système de racines. On peut identifier $R^G(\sigma)$ au sous-ensemble des $w \in W^G(\sigma)$ qui conservent l'ensemble fixé de racines positives. On a alors la décomposition

$$W^G(\sigma) = W_0^G(\sigma) \rtimes R^G(\sigma).$$

**Remarque.** Les définitions ci-dessus dépendent de choix d'opérateurs d'entrelacement normalisés. Si on change de choix, on obtient une nouvelle représentation, notons-la $\underline{r}_P$. On vérifie qu'il existe un caractère unitaire $\chi$ de $W^G(\sigma)$, que l'on remonte en un caractère de $\mathcal{N}^G(\sigma)$, de sorte que $\underline{r}_P(A,n) = \chi(A,n)r_P(A,n)$. On peut introduire l'automorphisme $\boldsymbol{\chi}$ de $\mathcal{N}^G(\sigma)$ qui à $(A,n)$ associe $(\chi(A,n)A,n)$. On a alors $\underline{r}_P = r_P \circ \boldsymbol{\chi}$. A l'automorphisme $\boldsymbol{\chi}$ près, nos définitions sont donc indépendantes des choix d'opérateurs normalisés. En tout cas, dans la suite, ces choix sont fixés.

Soit $\lambda \in i\mathcal{A}_{G,F}^*$. L'application

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{N}^G(\sigma) & \to & \mathcal{N}^G(\sigma_\lambda) \\ (A,n) & \mapsto & (Ae^{<\lambda,H_G(n)>},n) \end{array}$$

est un isomorphisme. A cause de la torsion par $e^{<\lambda,H_G(n)>}$, cet isomorphisme est compatible avec les plongements de $M(F)$ dans les deux groupes $\mathcal{N}^G(\sigma)$ et $\mathcal{N}^G(\sigma_\lambda)$. Il se quotiente en un isomorphisme $\mathcal{R}(\sigma) \simeq \mathcal{R}(\sigma_\lambda)$ compatible avec l'identité $R(\sigma) = R(\sigma_\lambda)$.

## 1.12 Coefficients

Rappelons qu'Harish-Chandra a défini une fonction $\Xi$ sur $G(F)$. Elle vérifie les propriétés :

(1) la fonction $\Xi$ est biinvariante par $K$.

(2) il existe $d \in \mathbb{N}$ tel que l'on ait les majorations

$$\delta_0(m)^{-1/2} << \Xi(m) << \delta_0(m)^{-1/2}(1 + |H_0(m)|)^d$$

pour tout $m \in M_0(F)^{\geq}$.

Soient $P = MU_P$ un sous-groupe parabolique semi-standard et $\sigma \in \Pi_{disc}(M(F))$. Pour $\lambda \in i\mathcal{A}_{M,F}^*$, posons $\pi_\lambda = Ind_P^G(\sigma_\lambda)$, que l'on réalise dans l'espace $V_{\sigma,P}$. Pour $u, v \in V_{\sigma,P}$, on définit une fonction coefficient sur $G(F)$ qui, à $g \in G(F)$, associe le produit scalaire $(u, \pi_\lambda(g)v)$. On a

(3) $|(u, \pi_\lambda(g)v)| << \Xi(g)$ pour tout $g \in G(F)$ et tout $\lambda \in i\mathcal{A}_{M,F}^*$ ;

plus précisément

(4) $\int_K |(u(k), (\pi_\lambda(g)v)(k))|\, dk << \Xi(g)$ pour tout $g \in G(F)$ et tout $\lambda \in i\mathcal{A}_{M,F}^*$.

Cela résulte de la preuve du lemme VI.2.2 de [W].

Soit $Q = LU_Q$ un sous-groupe parabolique standard. Notons $W^G(L|P) = \{s \in W^G; s(M) \subset L, P_0 \cap L \subset s(P) \cap L\}/W^M$. Rappelons que pour tout $s$ dans cet ensemble, on fixe un relèvement de $s$ dans $K$, que l'on note encore $s$. On pose $Q_s = (s(P) \cap L)U_Q$ et $\underline{Q}_s = (s(P) \cap L)U_{\bar{Q}}$. On introduit la représentation $\pi^L_{s\lambda} = Ind^L_{s(P)\cap L}((s\sigma)_{s\lambda})$, que l'on réalise dans l'espace $V^L_{s\sigma,s(P)\cap L}$. Le terme

$$J_{Q_s|s(P)}((s\sigma)_{s\lambda}) \circ \gamma(s)u$$

est une fonction sur $K$ appartenant à l'espace de la représentation $Ind^G_{Q_s}((s\sigma)_{s\lambda})$. Sa restriction à $K \cap L(F)$ appartient à $V^L_{s\sigma,s(P)\cap L}$. On note $u_s(\lambda)$ cette restriction. De même, on note $v_s(\lambda)$ la restriction de

$$J_{\underline{Q}_s|s(P)}((s\sigma)_{s\lambda}) \circ \gamma(s)v$$

à $K \cap L(F)$. Pour $l \in L(F)$, posons

$$E_\flat(l,\lambda) = \gamma(G|L)^{-1} \sum_{s\in W^G(L|P)} (u_s(\lambda), \pi^L_{s\lambda}(l)v_s(\lambda)).$$

On appelle cette fonction le terme constant faible du coefficient $(u, \pi_\lambda(g)v)$.

**Proposition**. *Soit $\nu > 0$ un réel. Il existe $c > 0$ et une fonction $C$ sur $i\mathcal{A}^*_{M,F}$, lisse, à croissance modérée et à valeurs positives de sorte que l'on ait la majoration*

$$|(u, \pi_\lambda(m)v) - \delta_Q(m)^{-1/2}E_\flat(m,\lambda)| \leq C(\lambda)\delta_Q(m)^{-1/2}\Xi^L(m)e^{-c|H_0(m)|}$$

*pour tout $\lambda \in i\mathcal{A}^*_{M,F}$ et tout $m \in M_0(F)^{\geq}$ vérifiant la condition*

$$< \alpha, H_0(m) > \geq \nu|H_0(m)|$$

*pour tout $\alpha \in \Delta_0 - \Delta_0^Q$.*

Cf. [A1] lemme 7.1 et [W] lemme VI.2.3 dans le cas non-archimédien.

## 1.13 La formule de Plancherel

Cette formule exprime toute fonction $K$-finie $f \in C^\infty_c(G(F))$ à l'aide de ses actions dans les représentations induites unitaires de représentations de la série discrète des Levi de $G$ (la condition que $f$ est $K$-finie n'est une restriction que si $F$ est archimédien). Dans la formule ci-dessous, pour tout $M_{disc} \in \mathcal{L}(M_0)$, on fixe un parabolique $S \in \mathcal{P}(M_{disc})$ et, pour tout élément de $\Pi_{disc}(M_{disc}(F))/i\mathcal{A}^*_{M_{disc},F}$, on fixe un point-base $\sigma$ dans cette orbite. Alors, pour toute fonction $K$-finie $f \in C^\infty_c(G(F))$ et tout $g \in G(F)$, on a l'égalité

$$f(g) = \sum_{M_{disc}\in\mathcal{L}(M_0)} |W^{M_{disc}}||W^G|^{-1} \sum_{\sigma\in\Pi_{disc}(M_{disc}(F))/i\mathcal{A}^*_{M_{disc},F}} |Stab(i\mathcal{A}^*_{M_{disc},F},\sigma)|^{-1}$$

$$\int_{i\mathcal{A}^*_{M_{disc},F}} m^G(\sigma_\lambda)trace(Ind^G_S(\sigma_\lambda, g^{-1})Ind^G_S(\sigma_\lambda, f))\, d\lambda.$$

## 1.14 La formule du produit scalaire d'Arthur

Pour exprimer cette formule sous une forme suffisamment générale, on fixe un sous-tore $D \subset A_G$ et un caractère unitaire $\omega$ de $G(F)$ dont la restriction à $D(F)$ est triviale. On adapte nos notations en notant par exemple $\mathcal{A}_0^D$ l'orthogonal du sous-espace $\mathcal{A}_D \subset \mathcal{A}_0$ et $H_D$, $H^D$ les projections d'un élément $H \in \mathcal{A}_0$ sur $\mathcal{A}_D$ et $\mathcal{A}^D$. On considère un élément $T \in \mathcal{A}_0$ que l'on traite comme une variable. Mais on suppose qu'il reste dans un sous-ensemble fixe de $\mathcal{A}_0$ défini par des relations

$< \alpha, T >> 0$ pour tout $\alpha \in \Delta_0$ ;

$< \alpha, T >> c_\star |T|$ pour tout $\alpha \in \Delta_0$, où $c_\star > 0$ est un réel fixé ;

$T \in \mathcal{A}_{M_0,F} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ si $F$ est non-archimédien.

Remarquons que, dans un tel domaine, les fonctions $|T|$ et $< \alpha, T >$, pour $\alpha \in \Delta_0$, sont équivalentes. On note $\kappa^T$ la fonction caractéristique de l'ensemble des $g \in G(F)$ tels que $\phi^G(h_0(g) - T) = 1$, cf. 1.1 pour la définition de $h_0(g)$.

Soient $P = MU_P$ et $P' = M'U_{P'}$ deux sous-groupes paraboliques semi-standard et soient $\sigma \in \Pi_{disc}(M(F))$, $\sigma' \in \Pi_{disc}(M'(F))$. On suppose que :

- les restrictions à $D(F)$ des caractères centraux de $\sigma$ et $\sigma'$ coïncident.

Fixons $u, v \in V_{\sigma,P}$ et $u', v' \in V_{\sigma',P'}$. Pour $\lambda \in i\mathcal{A}^*_{M,F}$ et $\lambda' \in i\mathcal{A}^*_{M',F}$ tels que $\lambda_D - \lambda'_D \in i\mathcal{A}^\vee_{D,F}$, posons $\pi_\lambda = Ind_P^G(\sigma_\lambda)$ et $\pi'_{\lambda'} = Ind_{P'}^G(\sigma'_{\lambda'})$. Pour $X \in \mathcal{A}_{G,F}$, notons $G(F;X)$ l'ensemble des $g \in G(F)$ tels que $H_G(g) = X$. On munit cet ensemble d'une mesure de sorte que l'on ait l'égalité

$$\int_{G(F)} f(g)\, dg = \int_{\mathcal{A}_{G,F}} \int_{G(F;X)} f(g)\, dg\, dX$$

pour toute $f \in C_c^\infty(G(F))$. On note $D(F)_c = Ker(H_G) \cap D(F)$. On munit ce groupe d'une mesure de Haar, et l'ensemble $D(F)_c\backslash G(F;X)$ de la mesure quotient. Remarquons que $D(F)_c\backslash G(F;X) = D(F)\backslash D(F)G(F;X)$, ce dernier quotient est donc muni d'une mesure.

Posons

$$\omega^T(X;\lambda,\lambda') = \int_{D(F)\backslash D(F)G(F;X)} (v, \pi_\lambda(g)u)(\pi'_{\lambda'}(g)v', u')\omega(g)\kappa^T(g)\, dg.$$

Cette expression ne dépend que de la classe $X + \mathcal{A}_{D,F}$.

La formule d'Arthur calcule une valeur approchée de $\omega^T(X;\lambda,\lambda')$. Rappelons ce résultat.

Soit $S = M_S U_S$ un sous-groupe parabolique standard. Notons $W^G(M_S|M) = \{s \in W^G; s(M) = M_S\}/W^M$. On définit de même $W^G(M_S|M')$. Soient $s \in W^G(M_S|M)$, $s' \in W^G(M_S|M')$, $k, k' \in K$. Définissons les éléments $u_s(k',\lambda), v_s(k,\lambda) \in V_\sigma$ et $u'_{s'}(k,\lambda'), v'_{s'}(k',\lambda') \in V_{\sigma'}$ par les formules suivantes

$$u_s(k',\lambda) = (J_{\bar{S}|s(P)}((s\sigma)_{s\lambda}) \circ \gamma(s)u)(k'),$$

$$v_s(k,\lambda) = (J_{S|s(P)}((s\sigma)_{s\lambda}) \circ \gamma(s)v)(k),$$

$$u'_{s'}(k,\lambda') = (J_{S|s'(P')}((s'\sigma')_{s'\lambda'}) \circ \gamma(s')u')(k),$$

$$v'_{s'}(k',\lambda') = (J_{\bar{S}|s'(P')}((s'\sigma')_{s'\lambda'}) \circ \gamma(s')v')(k').$$

On rappelle que les termes entre parenthèses sont des fonctions sur $K$ ; cela a donc un sens de les évaluer en $k$ ou $k'$. Pour des éléments $\epsilon, \eta \in V_\sigma$ et $\epsilon', \eta' \in V_{\sigma'}$, et pour $\Lambda \in \mathcal{A}^*_{M_S,\mathbb{C}}$ tel que $\Lambda_D \in i\mathcal{A}^\vee_{D,F}$, posons

$$r^T_{S,s,s'}(X;\epsilon,\eta,\epsilon',\eta';\Lambda) = \int_{D(F)\backslash D(F)M^G_S(F;X)} (\eta, s\sigma(x)\epsilon)(s'\sigma'(x)\eta',\epsilon')$$

$$\phi^G_S(H_0(x)-T)e^{<\Lambda,H_0(x)>}\omega(x)\,dx,$$

où $M^G_S(F;X) = M_S(F)\cap G(F;X)$ et la mesure est définie de façon analogue à celle sur $D(F)\backslash D(F)G(F;X)$. Cette intégrale est absolument convergente si $Re < \Lambda, \check{\alpha} >> 0$ pour tout $\alpha \in \Delta_S$ et se prolonge en une fonction méromorphe définie pour tout $\Lambda \in \mathcal{A}^*_{M_S,\mathbb{C}}$ tel que $\Lambda_D \in i\mathcal{A}^\vee_{D,F}$. Posons

$$r^T_{S,s,s'}(X;\lambda,\lambda';\Lambda) = \int_{K\times K}\omega(k'k^{-1})$$

$$r^T_{S,s,s'}(X, u_s(k',\lambda), v_s(k,\lambda), u'_{s'}(k,\lambda'), v'_{s'}(k',\lambda');\Lambda)\,dk\,dk'.$$

Pour des points $\lambda$ et $\lambda'$ où les opérateurs d'entrelacement intervenant ci-dessus n'ont pas de pôles, cette expression est holomorphe au point $\Lambda = s\lambda - s'\lambda'$. On pose

$$r^T(X;\lambda,\lambda') = \sum_{S;P_0\subset S}\ \sum_{s\in W^G(M_S|M),s'\in W^G(M_S|M')} r^T_{S,s,s'}(X;\lambda,\lambda';s\lambda - s'\lambda').$$

On obtient ainsi une fonction méromorphe en $\lambda$ et $\lambda'$.

**Théorème (Arthur)**. *Il existe $c>0$ et une fonction lisse et à croissance modérée $C$ sur $i\mathcal{A}^*_{M,F}\times i\mathcal{A}^*_{M',F}$, à valeurs positives, de sorte que, pour tous $\lambda\in i\mathcal{A}^*_{M,F}$, $\lambda'\in i\mathcal{A}^*_{M',F}$ pour tous $X$, $T$, $u, v, u', v'$, on ait la majoration*

$$|\omega^T(X;\lambda,\lambda') - r^T(X;\lambda,\lambda')| \leq m^G(\sigma_\lambda)^{-1/2}m^G(\sigma_{\lambda'})^{-1/2}C(\lambda,\lambda')e^{-c|T|}|u||v||u'||v'|.$$

On peut exprimer plus explicitement le terme $r^T_{S,s,t}(X;\lambda,\lambda';\Lambda)$. Commençons par calculer $r^T_{S,s,s'}(X;\epsilon,\eta,\epsilon',\eta';\Lambda)$. Pour simplifier les notations, on fixe $\epsilon,\eta,\epsilon',\eta'$. Pour $Y\in \mathcal{A}_{M_S,F}$, posons

$$r_{S,s,s'}(Y) = \int_{D(F)\backslash D(F)M_S(F;Y)}(\eta, s\sigma(x)\epsilon)(s'\sigma'(x)\eta',\epsilon')\omega(x)\,dx,$$

où $M_S(F;Y) = \{x\in M_S(F); H_{M_S}(x) = Y\}$. Posons comme en 1.6

$$\mathcal{A}^G_{M_S,F}(X) = \{Y\in\mathcal{A}_{M_S,F}; Y_G = X\}.$$

On a les égalités

$$r^T_{S,s,s'}(X;\epsilon,\eta,\epsilon',\eta';\Lambda) = \int_{(\mathcal{A}^G_{M_S,F}(X)+\mathcal{A}_{D,F})/\mathcal{A}_{D,F}}\phi^G_S(Y-T)e^{<\Lambda,Y>}r_{S,s,s'}(Y)\,dY$$

$$= \int_{\mathcal{A}^G_{M_S,F}(X)}\phi^G_S(Y-T)e^{<\Lambda,Y>}r_{S,s,s'}(Y)\,dY.$$

Notons $\omega_\sigma$ et $\omega_{\sigma'}$ les caractères centraux de $\sigma$ et $\sigma'$. Il est clair que, pour $Y \in \mathcal{A}_{M_S,F}$, $r_{S,s,s'}(Y) = 0$ si la restriction de $s(\omega_\sigma)s'(\omega_{\sigma'})^{-1}\omega$ à $A_{M_S}(F)_c$ est non triviale. Supposons cette condition vérifiée. Il existe alors un élément $\Lambda_{s,s'} \in i\mathcal{A}^*_{M_S}$ tel que

$$(s(\omega_\sigma)s'(\omega_{\sigma'})^{-1}\omega)(a) = e^{<\Lambda_{s,s'},H_{M_S}(a)>}$$

pour tout $a \in A_{M_S}(F)$. Cet élément est uniquement déterminé modulo $i\mathcal{A}^\vee_{A_{M_S},F}$ et vérifie $(\Lambda_{s,s'})_D \in i\mathcal{A}^\vee_{D,F}$. La fonction

$$Y \mapsto e^{-<\Lambda_{s,s'},Y>}r_{S,s,s'}(Y)$$

ne dépend que de la classe $Y + \mathcal{A}_{A_{M_S},F}$. L'ensemble $A_{M_S}(F)M_S(F;Y)$ est ouvert dans $M_S(F)$ et donc muni d'une mesure. On vérifie que, pour une fonction $f$ sur le quotient $A_{M_S}(F)\backslash A_{M_S}(F)M_S(F;Y)$, on a la formule d'intégration

$$\int_{D(F)\backslash D(F)M_S(F;Y)} f(x)\,dx = C\int_{A_{M_S}(F)\backslash A_{M_S}(F)M_S(F;Y)} f(x)\,dx,$$

où

$$C = mes(D(F)_c)^{-1}mes(i\mathcal{A}^*_{M_S,F})^{-1}[\mathcal{A}_{M_S,F} : \mathcal{A}_{A_{M_S},F}].$$

De ces considérations résulte l'égalité

$$e^{-<\Lambda_{s,s'},Y>}r_{S,s,s'}(Y) =$$

$$C\int_{A_{M_S}(F)\backslash A_{M_S}(F)M_S(F;Y)} (\eta, s\sigma(x)\epsilon)(s'\sigma'(x)\eta', \epsilon')\omega(x)e^{-<\Lambda_{s,s'},H_{M_S}(x)>}\,dx.$$

Pour $\mu \in i\mathcal{A}^\vee_{A_{M_S},F}/i\mathcal{A}^\vee_{M_S,F}$, posons

$$r^T_{S,s,s'}(\mu) = \sum_{Y\in\mathcal{A}_{M_S,F}/\mathcal{A}_{A_{M_S},F}} e^{-<\Lambda_{s,s'}+\mu,Y>}r^T_{S,s,s'}(Y).$$

Par inversion de Fourier, on a l'égalité

$$(1) \qquad r_{S,s,s'}(Y) = [\mathcal{A}_{M_S,F} : \mathcal{A}_{A_{M_S},F}]^{-1}\sum_{\mu\in i\mathcal{A}^\vee_{A_{M_S},F}/i\mathcal{A}^\vee_{M_S,F}} e^{<\Lambda_{s,s'}+\mu,Y>}r^T_{S,s,s'}(\mu).$$

L'égalité $s(M) = M_S$ entraîne $mes(i\mathcal{A}^*_{M_S,F}) = mes(i\mathcal{A}^*_{M,F})$. D'autre part, on a

$$r^T_{S,s,s'}(\mu) = C\int_{A_{M_S}(F)\backslash M_S(F)} (\eta, s\sigma(x)\epsilon)(s'\sigma'(x)\eta', \epsilon')e^{-<\Lambda_{s,s'}+\mu,H_{M_S}(x)>}\omega(x)\,dx.$$

Cette dernière expression est le produit scalaire de deux coefficients de représentations de la série discrète. Il est nul si la représentation $s'\sigma'$ n'est pas équivalente à la représentation $(\omega s\sigma)_{-\Lambda_{s,s'}-\mu}$, autrement dit si $\Lambda_{s,s'} + \mu \notin [s'\sigma', \omega s\sigma]$. Soit $\nu \in [s'\sigma', \omega s\sigma]$. Introduisons un isomorphisme unitaire $A_\nu : V_\sigma \to V_{\sigma'}$ tel que $(s'\sigma')(x) \circ A_\nu = \omega(x)A_\nu \circ (s\sigma)_{-\nu}(x)$ pour tout $x \in M'(F)$. Alors

$$r^T_{S,s,s'}(\nu - \Lambda_{s,s'}) = Cd(\sigma)^{-1}(A_\nu\eta, \epsilon')(\eta', A_\nu\epsilon).$$

La formule (1) se récrit

$$r_{S,s,s'}(Y) = mes(D(F)_c)^{-1} mes(i\mathcal{A}^*_{M,F})^{-1} d(\sigma)^{-1} \sum_{\nu \in [s'\sigma', \omega s\sigma]} e^{<\nu,Y>} (A_\nu \eta, \epsilon')(\eta', A_\nu \epsilon).$$

On a défini $\epsilon_S^{G,T}(X;\Lambda)$ en 1.6. On obtient finalement

$$r^T_{S,s,s'}(X;\epsilon,\eta,\epsilon',\eta';\Lambda) = mes(D(F)_c)^{-1} mes(i\mathcal{A}^*_{M,F})^{-1} d(\sigma)^{-1}$$

$$\sum_{\nu \in [s'\sigma', \omega s\sigma]} (A_\nu \eta, \epsilon')(\eta', A_\nu \epsilon) \epsilon_S^{G,T}(X; \Lambda + \nu).$$

Pour calculer $r^T_{S,s,s'}(X;\lambda,\lambda';\Lambda)$, on doit remplacer $\epsilon,\eta,\epsilon',\eta'$ par $u_s(k',\lambda)$, $v_s(k,\lambda)$, $u'_{s'}(k,\lambda')$, $v'_{s'}(k',\lambda')$, multiplier par $\omega(k'k^{-1})$ puis intégrer en $k,k' \in K$. Il apparaît des intégrales

$$\int_K (v'_{s'}(k',\lambda'), A_\nu u_s(k',\lambda))\omega(k')\, dk',$$

$$\int_K (A_\nu v_s(k,\lambda), u'_{s'}(k,\lambda'))\omega(k)^{-1}\, dk.$$

Considérons la première, la seconde étant analogue. L'opérateur $A_\nu$ définit par fonctorialité un opérateur de $V_{s\sigma,\bar{S}}$ dans $V_{\omega^{-1}s'\sigma',\bar{S}}$, que nous notons encore $A_\nu$. Notons $\underline{\omega}$ l'opérateur qui, à une fonction $f$ sur $K$, associe la fonction $k \mapsto \omega(k)f(k)$. Alors $\underline{\omega} \circ A_\nu$ envoie $V_{s\sigma,\bar{S}}$ dans $V_{s'\sigma',\bar{S}}$. L'intégrale ci-dessus se récrit

$$\int_K ((J_{\bar{S}|s'(P')}((s'\sigma')_{s'\lambda'}) \circ \gamma(s')v')(k'), (\underline{\omega} \circ A_\nu \circ J_{\bar{S}|s(P)}((s\sigma)_{s\lambda}) \circ \gamma(s)u)(k'))\, dk'.$$

Par définition du produit scalaire dans $V_{s'\sigma',\bar{S}}$, ce n'est autre que

$$(J_{\bar{S}|s'(P')}((s'\sigma')_{s'\lambda'}) \circ \gamma(s')v', \underline{\omega} \circ A_\nu \circ J_{\bar{S}|s(P)}((s\sigma)_{s\lambda}) \circ \gamma(s)u).$$

On obtient alors

$$(2) \qquad r^T_{S,s,s'}(X;\lambda,\lambda';\Lambda) = mes(D(F)_c)^{-1} mes(i\mathcal{A}^*_{M,F})^{-1} d(\sigma)^{-1}$$

$$\sum_{\nu \in [s'\sigma', \omega s\sigma]} (J_{\bar{S}|s'(P')}((s'\sigma')_{s'\lambda'}) \circ \gamma(s')v', \underline{\omega} \circ A_\nu \circ J_{\bar{S}|s(P)}((s\sigma)_{s\lambda}) \circ \gamma(s)u)$$

$$(\underline{\omega} \circ A_\nu \circ J_{S|s(P)}((s\sigma)_{s\lambda}) \circ \gamma(s)v, J_{S|s'(P')}((s'\sigma')_{s'\lambda'}) \circ \gamma(s')u')\epsilon_S^{G,T}(X;\Lambda+\nu).$$

# 2 Espaces tordus

## 2.1 Notations

Soit $\tilde{G}$ un espace tordu sous $G$. Rappelons qu'un tel espace est une variété algébrique sur $F$ munie d'actions algébriques de $G$ à droite et à gauche

$$\begin{array}{ccc} G \times \tilde{G} \times G & \to & \tilde{G} \\ (g,\gamma,g') & \mapsto & g\gamma g' \end{array}$$

pour chacune desquelles $\tilde{G}$ est un espace principal homogène. On impose la condition

(1) $\tilde{G}(F) \neq \emptyset$.

Pour $\gamma \in \tilde{G}$, on note $ad_\gamma$ l'automorphisme de $G$ tel que $\gamma g = ad_\gamma(g)\gamma$ pour tout $g \in G$. Il arrive que $ad_\gamma$ induise sur certains objets des automorphismes indépendants de $\gamma$. On note alors $\theta$ ces automorphismes. Par exemple, $\tilde{G}$ détermine un automorphisme $\theta$ de $Z_G$ ou de $A_G$. On impose la condition

(2) l'automorphisme $\theta$ de $Z_G$ est d'ordre fini.

**Remarque.** Les hypothèses (1) et (2) impliquent qu'il existe un groupe algébrique non connexe $G^+$ défini sur $F$, de composante neutre $G$, tel que $\tilde{G}$ s'identifie à une composante connexe de $G^+$, cf. [L] paragraphe 3.4. Cela nous permet d'utiliser pour notre espace $\tilde{G}$ les résultats démontrés dans la littérature pour les groupes non connexes. Il est néanmoins très probable que ces résultats restent vrais sous une hypothèse plus faible que (2).

On note $A_{\tilde{G}}$ le sous-tore de $A_G$ tel que $X_*(A_{\tilde{G}}) = X_*(A_G)^\theta$, l'exposant signifiant selon l'usage l'ensemble des invariants par $\theta$. On pose $\mathcal{A}_{\tilde{G}} = X_*(A_{\tilde{G}}) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R} = \mathcal{A}_G^\theta$. On note $a_{\tilde{G}}$ la dimension de $\mathcal{A}_{\tilde{G}}$. On note $H_{\tilde{G}} : G(F) \to \mathcal{A}_{\tilde{G}}$ la composée de $H_G$ et de la projection orthogonale de $\mathcal{A}_G$ sur $\mathcal{A}_{\tilde{G}}$. On note $\mathcal{A}_{\tilde{G},F}$ l'image de $G(F)$ par l'application $H_{\tilde{G}}$.

Soit $(P, M)$ une paire parabolique de $G$. Notons $\tilde{P}$ le normalisateur de $P$ dans $\tilde{G}$, c'est-à-dire l'ensemble des $\gamma \in \tilde{G}$ tels que $ad_\gamma$ conserve $P$. Notons $\tilde{M}$ le normalisateur commun de $P$ et $M$ dans $\tilde{G}$. Si $\tilde{P}$ n'est pas vide, les ensembles $\tilde{M}$, $\tilde{P}(F)$, $\tilde{M}(F)$ ne le sont pas non plus. On dit alors que $\tilde{P}$ est un espace parabolique et $\tilde{M}$ est un espace de Levi. Dans le cas de la paire minimale $(P_0, M_0)$, il est toujours vrai que $\tilde{P}_0$ n'est pas vide. Soit $\gamma_0 \in \tilde{M}_0(F)$. Un sous-groupe parabolique standard $P$ donne naissance à un espace parabolique $\tilde{P}$ si et seulement si $ad_{\gamma_0}(P) = P$. On peut supposer et on suppose que la forme quadratique fixée sur $\mathcal{A}_0$ est invariante par l'automorphisme déduit de $ad_{\gamma_0}$ par fonctorialité.

On adopte pour les espaces de Levi et les espaces paraboliques des notations similaires à celles introduites pour les groupes. Par exemple, on note $\mathcal{P}(\tilde{M})$ l'ensemble des espaces paraboliques de composante de Levi $\tilde{M}$. Ou bien, pour $H \in \mathcal{A}_M$, on note $H_{\tilde{M}}$ et $H^{\tilde{M}}$ ses projections sur l'espace $\mathcal{A}_{\tilde{M}}$, resp. sur son orthogonal $\mathcal{A}_M^{\tilde{M}}$ dans $\mathcal{A}_M$. On munit les espaces $\mathcal{A}_{\tilde{M}}$, $i\mathcal{A}_{\tilde{M}}^*$ et le groupe $A_{\tilde{M}}(F)$ de mesures de Haar vérifiant des conditions similaires à celles de 1.2.

Soient $L$ un Levi de $G$ et $\gamma \in \tilde{G}(F)$ tel que $ad_\gamma(L) = L$. Notons $\theta$ l'automorphisme de $\mathcal{A}_L$ déduit fonctoriellement de $ad_\gamma$. Posons $\mathcal{A}_L^\theta = \{H \in \mathcal{A}_L; \theta H = H\}$. Notons $M$ le plus grand Levi contenant $L$ tel que $\mathcal{A}_L^\theta \subset \mathcal{A}_M$. Posons $\tilde{M} = M\gamma$. On a

(3) l'ensemble $\tilde{M}$ est un ensemble de Levi ;

(4) on a l'égalité $\mathcal{A}_L^\theta = \mathcal{A}_{\tilde{M}}$ ;

(5) l'ensemble des espaces paraboliques $\tilde{P}$ tels que $L \subset P$ et $ad_\gamma(P) = P$ est égal à $\mathcal{F}(\tilde{M})$.

Preuve. Notons $T$ le sous-tore de $A_L$ tel que $X_*(T) = X_*(A_L) \cap \mathcal{A}_L^\theta$. Le Levi $M$ est le commutant de ce tore dans $G$. Par définition de $T$ et $\theta$, $ad_\gamma$ fixe tout point de $T$. Donc $\tilde{M}$ est le commutant de $T$ dans $\tilde{G}$ (c'est-à-dire l'ensemble des $\gamma' \in \tilde{G}$ tels que $ad_{\gamma'}$ fixe tout point de $T$). On sait qu'un tel commutant est un espace de Levi, pourvu qu'il ne soit pas vide. Cette dernière condition est vérifiée. D'où (1). Evidemment $T$ est inclus dans $A_{\tilde{M}}$, donc $\mathcal{A}_L^\theta \subset \mathcal{A}_{\tilde{M}}$. Inversement, un élément $H \in \mathcal{A}_{\tilde{M}}$ appartient à $\mathcal{A}_M$ donc aussi à $\mathcal{A}_L$. Puisque $\gamma \in \tilde{M}$, on a aussi $\theta H = H$, donc $H \in \mathcal{A}_L^\theta$. Cela prouve (2). Soit $\tilde{P} = \tilde{M}_P U_P$ un espace parabolique tel que $L \subset M_P$ et $ad_\gamma(P) = P$. Puisque $ad_\gamma$ conserve $L$ et que $M_P$ est l'unique composante de Levi de $P$ contenant $L$, on a aussi $ad_\gamma(M_P) = M_P$. Donc

$\tilde{M}_P = M_P\gamma$. Alors $\mathcal{A}_{\tilde{M}_P}$ est un sous-espace de $\mathcal{A}_L$ sur lequel $\theta$ agit trivialement. D'où $\mathcal{A}_{\tilde{M}_P} \subset \mathcal{A}_L^\theta = \mathcal{A}_{\tilde{M}}$. D'où $\tilde{M} \subset \tilde{M}_P$, ce qui équivaut à $\tilde{P} \in \mathcal{F}(\tilde{M})$. La réciproque est claire. $\square$

On a fixé une paire parabolique minimale $(P_0, M_0)$ et un groupe compact maximal $K$. On a

(6) si $F$ est archimédien, il existe $\gamma_0 \in \tilde{M}_0(F)$ tel que $ad_{\gamma_0}$ conserve la composante neutre de $K$.

Cf. [DM] lemme 1.

## 2.2 Définitions combinatoires

Soit $\tilde{P} = \tilde{M}U$ un espace parabolique tel que $M_0 \subset M$. Pour $\alpha \in \Delta_P$, on note $\tilde{\alpha}$ la restriction de $\alpha$ à $A_{\tilde{M}}$. On note $\Delta_{\tilde{P}}$ l'ensemble de ces $\tilde{\alpha}$ pour $\alpha \in \Delta_P$. Si on fixe $\gamma \in \tilde{M}$, l'automorphisme $ad_\gamma$ définit par fonctorialité une permutation de $\Delta_P$ indépendante de $\gamma$, que l'on peut noter $\theta$. Alors $\Delta_{\tilde{P}}$ s'identifie à l'ensemble des orbites dans $\Delta_P$ pour l'action du groupe de permutations engendré par $\theta$. Pour $\alpha \in \Delta_P$, on note $\varpi_{\tilde{\alpha}}$ la restriction de $\varpi_\alpha$ à $A_{\tilde{M}}$. Cette restriction ne dépend en effet que de la restriction $\tilde{\alpha}$ de $\alpha$. Les ensembles $\Delta_{\tilde{P}}$ et $\{\varpi_{\tilde{\alpha}}; \tilde{\alpha} \in \Delta_{\tilde{P}}\}$ sont des bases de $\mathcal{A}_{\tilde{M}}^{\tilde{G},*}$.

Soient $\tilde{P} = \tilde{M}U_P \subset \tilde{Q} = \tilde{L}U_Q$ deux espaces paraboliques tels que $M_0 \subset M$. On définit naturellement le sous-ensemble $\Delta_{\tilde{P}}^{\tilde{Q}} \subset \Delta_{\tilde{P}}$. On définit les fonctions $\tau_{\tilde{P}}^{\tilde{Q}}$, $\hat{\tau}_{\tilde{P}}^{\tilde{Q}}$, $\phi_{\tilde{P}}^{\tilde{Q}}$, $\delta_{\tilde{P}}^{\tilde{Q}}$ sur $\mathcal{A}_{\tilde{M}}$ et $\Gamma_{\tilde{P}}^{\tilde{Q}}$ sur $\mathcal{A}_{\tilde{M}} \times \mathcal{A}_{\tilde{M}}$ en remplaçant $\alpha$ par $\tilde{\alpha}$ et $\varpi_\alpha$ par $\varpi_{\tilde{\alpha}}$ dans les définitions de 1.3. On définit aussi la notion de famille de points $(\tilde{G}, \tilde{M})$-orthogonale. Pour une telle famille $\mathcal{Y}$, on définit la fonction $\Gamma_{\tilde{M}}^{\tilde{Q}}(., \mathcal{Y})$. Toutes les relations énoncées dans le paragraphe 1.3 restent valables pour ces nouvelles fonctions. Evidemment, toutes ces fonctions peuvent être considérées comme des fonctions sur $\mathcal{A}_M$ ou même sur $\mathcal{A}_0$, par composition avec la projection orthogonale sur $\mathcal{A}_{\tilde{M}}$.

Soient maintenant $Q = LU_Q \subset R$ deux sous-groupes paraboliques tels que $M_0 \subset L$ et soit $\tilde{P} = \tilde{M}U_P$ un espace parabolique tel que $Q \subset P \subset R$. Notons $\tilde{\sigma}_Q^R$ la fonction caractéristique du sous-ensemble des $H \in \mathcal{A}_L$ qui vérifient les conditions suivantes :

$< \alpha, H >> 0$ pour tout $\alpha \in \Delta_Q^R$ ;

$< \alpha, H >\leq 0$ pour tout $\alpha \in \Delta_Q - \Delta_Q^R$ ;

$< \varpi_{\tilde{\alpha}}, H_{\tilde{M}} >> 0$ pour tout $\tilde{\alpha} \in \Delta_{\tilde{P}}$.

On démontre que cette fonction ne dépend pas de $\tilde{P}$ vérifiant les conditions ci-dessus, cf. [LW] lemme 2.10.3. Soulignons que cette fonction n'est définie que s'il existe au moins un $\tilde{P}$ vérifiant ces conditions. Pour un sous-groupe parabolique $Q = LU_Q$ et un espace parabolique $\tilde{P}$ tel que $Q \subset P$, on a l'égalité

(1) $\tau_Q^P(H)\hat{\tau}_{\tilde{P}}(H) = \sum_{R; P \subset R} \tilde{\sigma}_Q^R(H)$ pour tout $H \in \mathcal{A}_L$,

cf. [LW] lemme 2.10.5.

## 2.3 $(\tilde{G}, \tilde{M})$-familles

Les définitions et résultats des paragraphes 1.4 à 1.8 s'adaptent aux espaces tordus. Pour un espace de Levi $\tilde{M}$, on définit une notion de $(\tilde{G}, \tilde{M})$-famille : c'est une famille $(\varphi(\Lambda, \tilde{P}))_{\tilde{P} \in \mathcal{P}(\tilde{M})}$ où $\Lambda \mapsto \varphi(\Lambda, \tilde{P})$ est une fonction $C^\infty$ sur $i\mathcal{A}_{\tilde{M}}^*$ ; pour deux espaces paraboliques adjacents $\tilde{P}$ et $\tilde{P}'$, les fonctions $\varphi(\Lambda, \tilde{P})$ et $\varphi(\Lambda, \tilde{P}')$ se recollent sur le mur séparant les chambres positives associées aux deux espaces paraboliques. Pour une telle famille, on définit la fonction $\varphi_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(\Lambda)$. Pour $X \in \mathcal{A}_{\tilde{G},F}$ et pour une famille $(\tilde{G}, \tilde{M})$-orthogonale $\mathcal{Y}$, on définit la fonction $\varphi_{\tilde{M}}^{\tilde{G},\mathcal{Y}}(X;\Lambda)$. Ces fonctions vérifient les mêmes propriétés que dans le cas non tordu.

Considérons un Levi $L$ contenu dans $\tilde{M}$. Soit $(\varphi(\Lambda, Q))_{Q\in\mathcal{P}(L)}$ une $(G, L)$-famille. Pour $\tilde{P} \in \mathcal{P}(\tilde{M})$, choisissons $Q \in \mathcal{P}(L)$ tel que $Q \subset P$. La restriction de $\Lambda \mapsto \varphi(\Lambda, Q)$ à $i\mathcal{A}_{\tilde{M}}^*$ ne dépend pas du choix de $Q$. On la note $\varphi(\Lambda, \tilde{P})$. Alors la famille $(\varphi(\Lambda, \tilde{P}))_{\tilde{P}\in\mathcal{P}(\tilde{M})}$ est une $(\tilde{G}, \tilde{M})$-famille.

## 2.4 Une construction auxiliaire

Pour un caractère $\mu$ de $G(F)$ et pour $\gamma \in \tilde{G}(F)$, le caractère $\mu \circ ad_\gamma$ ne dépend pas de $\gamma$, on le note $\mu \circ \theta$. On note $\mu \circ (1 - \theta)$ le caractère $\mu(\mu \circ \theta)^{-1}$. Dans la suite, on considérera un caractère unitaire $\omega$ de $G(F)$ dont la restriction à $Z_G(F)^\theta$ est triviale. Certains aspects de la théorie se simplifient quand ce caractère est de la forme $\mu\circ(1-\theta)$. Ce n'est pas toujours le cas mais nous allons voir que l'on peut se ramener à ce cas en effectuant des extensions.

Soient $(G', \tilde{G}')$ un couple vérifiant les mêmes hypothèses que notre couple $(G, \tilde{G})$. Soit $p : G' \to G$ un homomorphisme de groupes algébriques et $\tilde{p} : \tilde{G}' \to \tilde{G}$ un homomorphisme de variétés algébriques (tous deux définis sur $F$). On dit que $(p, \tilde{p})$ est un homomorphisme d'espaces tordus si et seulement si on a l'égalité

$$\tilde{p}(x'\gamma'y') = p(x')\tilde{p}(\gamma')p(y')$$

pour tous $\gamma' \in \tilde{G}'$ et $x', y' \in G'$.

**Proposition**. *Soit $\omega$ un caractère unitaire de $G(F)$ dont la restriction à $Z_G(F)^\theta$ est triviale. Il existe un espace tordu $(G', \tilde{G}')$ vérifiant les hypothèses (1) et (2) de 2.1, et un homomorphisme d'espaces tordus $(p, \tilde{p}) : (G', \tilde{G}') \to (G, \tilde{G})$ vérifiant les conditions suivantes :*

*(i) l'homomorphisme $p$ s'insère dans une suite exacte*

$$1 \to C \to G' \xrightarrow{p} G \to 1$$

*où $C$ est un sous-tore central de $G'$ ;*

*(ii) pour toute extension $F'$ de $F$, l'homomorphisme $p : G'(F') \to G(F')$ est surjectif;*

*(iii) il existe un caractère unitaire $\mu'$ de $G'(F)$ tel que $\omega \circ p = \mu' \circ (1 - \theta')$ (en notant $\theta'$ l'analogue de $\theta$ pour $(G', \tilde{G}')$).*

Preuve. On commence par montrer

(1) il existe $(G', \tilde{G}')$ vérifiant (i) et (ii) et tel que le groupe dérivé de $G'$ soit simplement connexe.

C'est une simple adaptation de la théorie des $z$-extensions. Fixons $\gamma \in \tilde{G}(F)$, posons $\theta = ad_\gamma$. Notons $G_{SC}$ le revêtement simplement connexe du groupe dérivé de $G$. On sait que l'on a un isomorphisme

$$(G_{SC} \times Z_G^0)/\Xi \simeq G,$$

où $\Xi$ est un sous-goupe abélien fini de $G_{SC} \times Z_G^0$. L'automorphisme $\theta$ se relève en un automorphisme de $G_{SC}$, donc aussi en un automorphisme de $G_{SC} \times Z_G^0$ qui préserve

$\Xi$. On note tous ces automorphismes $\theta$. Fixons une clôture algébrique $\bar{F}$ de $F$, posons $\Gamma_F = Gal(\bar{F}/F)$. Fixons une extension galoisienne finie $F'$ de $F$ telle que $\Gamma_{F'}$ agisse trivialement sur $\Xi$. Notons $\hat{\Xi}$ le groupe $Hom(\Xi, \bar{F}^\times)$ des caractères algébriques de $\Xi$ et $\mathbb{Z}[\hat{\Xi}]$ le $\mathbb{Z}$-module libre de base $\hat{\Xi}$. Pour plus de clarté, si $\mu \in \hat{\Xi}$, on note $\underline{\mu}$ l'élément de base de $\mathbb{Z}[\hat{\Xi}]$. Le module $\mathbb{Z}[\hat{\Xi}]$ est muni d'une action de $\Gamma_F$ triviale sur $\Gamma_{F'}$. Notons $\Lambda$ l'ensemble des fonctions $f : \Gamma_{F'}\backslash\Gamma_F \to \mathbb{Z}[\hat{\Xi}]$. On le munit de l'action galoisienne par translations à droite. On note $C$ le tore sur $F$ tel que $X_*(C) = \Lambda$, muni de cette action galoisienne. Par ailleurs $\theta$ se transporte en une permutation de $\hat{\Xi}$, puis en un automorphisme de $\mathbb{Z}[\hat{\Xi}]$, puis en un automorphisme de $\Lambda$ (par action sur l'espace d'arrivée), enfin en un automorphisme $\theta_C$ de $C$. Il est clair que $\theta_C$ est défini sur $F$. On définit deux applications

$$\Xi \to \mathbb{Z}[\hat{\Xi}] \otimes_{\mathbb{Z}} \bar{F}^\times$$

$$\mathbb{Z}[\hat{\Xi}] \otimes_{\mathbb{Z}} \bar{F}^\times \to C.$$

La première envoie $\xi \in \Xi$ sur $\sum_{\mu\in\hat{\Xi}} \underline{\mu} \otimes \mu(\xi)$. La seconde est déduite de l'application $\mathbb{Z}[\hat{\Xi}] \to \Lambda$ qui à $x \in \mathbb{Z}[\hat{\Xi}]$ associe la fonction $f$ définie par $f(\sigma) = \sigma x$. Notons $\iota : \Xi \to C$ la composée des deux applications. Elle est injective, équivariante pour les actions galoisiennes et vérifie $\iota \circ \theta = \theta_C \circ \iota$. Posons

$$G' = (G_{SC} \times Z_G^0 \times C)/\{(\xi, \iota(\xi)); \xi \in \Xi\}.$$

On a bien la suite exacte

$$1 \to C \to G' \stackrel{p}{\to} G \to 1.$$

La condition (ii) est vérifiée parce que $C$ est un tore induit, donc $H^1(\Gamma_{F'}, C) = 0$ pour toute extension $F'$ de $F$. Enfin, le groupe dérivé de $G'$ est simplement connexe parce que l'homomorphisme naturel $G_{SC} \to G'$ est injectif. Le produit des automorphismes $\theta$ de $G_{SC} \times Z_G^0$ et $\theta_C$ de $C$ se descend en un automorphisme $\theta'$ de $G'$. Sa restriction à $Z_{G'}$ est d'ordre fini. On introduit une variété $\tilde{G}'$ muni d'un isomorphisme défini sur $F$ de $G'$ sur $\tilde{G}'$. On note $g \mapsto g\boldsymbol{\theta}'$ cet isomorphisme. On définit les actions à gauche et à droite de $G'$ sur $\tilde{G}'$ par $(x, g\boldsymbol{\theta}, y) \mapsto xg\theta'(y)\boldsymbol{\theta}'$. On définit $\tilde{p} : \tilde{G}' \to \tilde{G}$ par $\tilde{p}(g\boldsymbol{\theta}') = g\gamma$. Le couple $(p, \tilde{p})$ est un homomorphisme d'espaces tordus. Cela prouve (1).

On montre ensuite

(2) les assertions de la proposition sont vérifiées si le groupe dérivé de $G$ est simplement connexe.

On fixe de nouveau $\gamma \in \tilde{G}(F)$ et on en déduit un automorphisme $\theta$ de $G$. On introduit le tore $D = Z_G^0/(Z_{G_{SC}} \cap Z_G^0)$. On a la suite exacte

$$1 \to G_{SC} \to G \stackrel{d}{\to} D \to 1,$$

d'où

$$1 \to G_{SC}(F) \to G(F) \stackrel{d}{\to} D(F).$$

De $\theta$ se déduit un automorphisme encore noté $\theta$ de $D$. Tout caractère de $G_{SC}(F)$ étant trivial, $\omega$ se factorise en un caractère du quotient $G_{SC}(F)\backslash G(F)$, que l'on peut prolonger en un caractère de $D(F)$. On note $\omega_D$ ce prolongement. Notons $Z_G^{\theta,0}$ et $D^{\theta,0}$ les composantes neutres des sous-groupes de points fixes par $\theta$ dans $Z_G$ et $D$. L'homomorphisme $Z_G^{\theta,0} \to D^{\theta,0}$ est surjectif, donc $\underline{d}(Z_G^{\theta,0}(F))$ est d'indice fini dans $D^{\theta,0}(F)$. Par hypothèse, $\omega$ est trivial sur $Z_G(F)^\theta$, a fortiori sur $Z_G^{\theta,0}(F)$. Donc la restriction de $\omega_D$ à $D^{\theta,0}(F)$ est d'ordre fini. Notons $n_1$ l'ordre de $\omega_D$, $n_2$ celui de l'automorphisme $\theta$ de $D$ et posons

$N = n_1 n_2$. Si $N = 1$, on a $D = D^{\theta,0}$ puis $\omega = 1$. On prend $G' = G$, $\tilde{G}' = \tilde{G}$ et c'est terminé. Supposons $N > 1$. Posons

$$C = \{(x_1, ..., x_N) \in D^N; \prod_{i=1,...,N} \theta_D^i x_i = 1\}.$$

C'est un tore isomorphe à $D^{N-1}$. Posons $G' = G \times C$. L'extension

$$1 \to C \to G' \xrightarrow{p} G \to 1$$

vérifie les conditions (i) et (ii). Définissons un automorphisme $\theta'$ de $G'$ par

$$\theta'(g, x_1, ..., x_N) = (\theta(g), \underline{d}(g)x_N, x_1, ..., x_{N-2}, \underline{d} \circ \theta(g^{-1})x_{N-1}).$$

On vérifie que

$$(\theta')^N(g, x_1, ..., x_N) = (\theta^N(g), x_1, ..., x_N).$$

Il en résulte que la restriction de $\theta'$ à $Z_{G'}$ est d'ordre fini. On définit l'espace tordu $\tilde{G}'$ et l'application $\tilde{p}$ comme dans la preuve de (1). Définissons un caractère $\mu'$ de $G'(F)$ par

$$\mu'(g, x_1, ..., x_N) = \prod_{i=1,...,N-1} \prod_{j=0,...,i-1} \omega_D^{-1} \circ \theta^j(x_i).$$

On calcule

$$\mu' \circ (1 - \theta')(g, x_1, ..., x_N) = \omega_D^{-1}(x_1 x_N^{-1} \underline{d}(g)^{-1}) \prod_{i=2,...,N-1} \prod_{j=0,...,i-1} \omega_D^{-1} \circ \theta^j(x_i x_{i-1}^{-1})$$

$$= \omega_D \circ \underline{d}(g) \omega_D(x_1^{-1} x_N) \left( \prod_{i=2,...,N-1} \prod_{j=0,...,i-1} \omega_D^{-1} \circ \theta^j(x_i) \right) \left( \prod_{i=1,...,N-2} \prod_{j=0,...,i} \omega_D^{-1} \circ \theta^j(x_i^{-1}) \right)$$

$$= \omega(g) \omega_D(x_N) \left( \prod_{i=1,...,N-2} \omega_D \circ \theta^i(x_i) \right) \prod_{j=0,...,N-2} \omega_D^{-1} \circ \theta^j(x_{N-1}).$$

On utilise la relation

$$x_N = \prod_{i=1,...,N-1} \theta^i(x_i^{-1})$$

et on obtient

$$\mu' \circ (1 - \theta')(g, x_1, ..., x_N) = \omega(g) \prod_{j=0,...,N-1} \omega_D^{-1} \circ \theta^j(x_{N-1}).$$

L'application $x \mapsto \prod_{j=0,...,n_2-1} \theta^j(x)$ envoie $D$ dans $D^{\theta,0}$, donc $D(F)$ dans $D^{\theta,0}(F)$. Donc, pour tout $x \in D(F)$, $\prod_{j=0,...,N-1} \theta^j(x)$ est la puissance $n_1$-ième d'un élément de $D^{\theta,0}(F)$. Il en résulte que

$$\prod_{j=0,...,N-1} \omega_D \circ \theta^j(x) = 1$$

pour tout $x \in D(F)$. L'égalité ci-dessus devient

$$\mu' \circ (1 - \theta')(g, x_1, ..., x_N) = \omega(g),$$

comme on le voulait. Cela prouve (2).

Dans le cas général, on commence par construire un couple vérifiant (1). On affecte les objets relatifs à ce couple d'un indice 1 : $G'_1$, $\tilde{G}'_1$, $p_1$, $\tilde{p}_1$. On applique (2) à ce couple et au caractère $\omega \circ p_1$. On obtient des objets $G'$, $\tilde{G}'$, $\mu'$ et des applications $p_2 : G' \to G'_1$, $\tilde{p}_2 : \tilde{G}' \to \tilde{G}'_1$. On pose $p = p_1 \circ p_2$, $\tilde{p} = \tilde{p}_1 \circ \tilde{p}_2$ et on note $C$ l'image réciproque de $C_1$ dans $G'$. Il est clair que les objets $G'$, $\tilde{G}'$, $C$, $p$ et $\tilde{p}$ vérifient les conditions de l'énoncé. $\square$

## 2.5 Représentations

Soit $\omega$ un caractère unitaire de $G(F)$. On suppose que sa restriction à $Z_G(F)^\theta$ est triviale. On appelle $\omega$-représentation lisse de $\tilde{G}(F)$ un couple $(\pi,\tilde{\pi})$, où $\pi$ est une représentation lisse de $G(F)$ dans un espace $V_\pi$ et $\tilde{\pi}$ est une application de $\tilde{G}(F)$ dans le groupe des automorphismes de $V_\pi$ telle que $\tilde{\pi}(g\gamma g')=\pi(g)\tilde{\pi}(\gamma)\pi(g')\omega(g')$ pour tous $g,g'\in G(F)$ et $\gamma\in\tilde{G}(F)$.

**Remarque.** Dans le cas où $F$ est archimédien, il faudrait distinguer, comme on l'a dit en 1.9, l'espace de la représentation et son sous-espace $V_\pi$ des vecteurs $K$-finis.

En pratique, on parlera plutôt de la $\omega$-représentation $\tilde{\pi}$, en occultant la représentation $\pi$ sous-jacente. Pour une $\omega$-représentation lisse $\tilde{\pi}$ et pour $z\in\mathbb{C}^\times$, on définit $z\tilde{\pi}$ par $(z\tilde{\pi})(\gamma)=z\tilde{\pi}(\gamma)$.

**Variante.** On dira que $\tilde{\pi}$ est unitaire s'il existe un produit hermitien défini positif sur $V_\pi$ tel que $\tilde{\pi}(\gamma)$ soit un opérateur unitaire pour tout $\gamma\in\tilde{G}(F)$. Notons $\mathbb{U}$ le groupe des nombres complexes de module 1. Pour une $\omega$-représentation lisse unitaire $\tilde{\pi}$ et pour $z\in\mathbb{U}$, $z\tilde{\pi}$ est encore unitaire.

On dit que $\tilde{\pi}$ est admissible si et seulement si $\pi$ l'est. On dit que $\tilde{\pi}$ est tempérée si et seulement si $\tilde{\pi}$ est unitaire et $\pi$ est tempérée. Nos hypothèses que $\omega$ unitaire et que l'automorphisme $\theta$ de $A_G$ est d'ordre fini impliquent que $\tilde{\pi}$ est de longueur finie si et seulement si $\pi$ l'est. Il y a une notion naturelle d'irréductibilité et une notion plus fine de $G$-irréductibilité : $\tilde{\pi}$ est $G$-irréductible si et seulement si $\pi$ est irréductible. Notons $Irr(G(F);\theta,\omega)$ l'ensemble des classes de représentations lisses irréductibles $\pi$ de $G(F)$ telles que $\omega\otimes\pi\simeq\pi\circ\theta$, où $\pi\circ\theta$ est la classe de $\pi\circ ad_\gamma$ pour un quelconque $\gamma\in\tilde{G}(F)$. L'application $\tilde{\pi}\mapsto\pi$ est une surjection de l'ensemble des $\omega$-représentations lisses $G$-irréductibles de $\tilde{G}(F)$ sur $Irr(G(F);\theta,\omega)$. Les fibres sont isomorphes à $\mathbb{C}^\times$.

La mesure de Haar fixée sur $G(F)$ détermine une mesure sur $\tilde{G}(F)$. Pour $f\in C_c^\infty(\tilde{G}(F))$, on définit l'opérateur

$$\tilde{\pi}(f)=\int_{\tilde{G}(F)}f(\gamma)\tilde{\pi}(\gamma)d\gamma.$$

Supposons $\tilde{\pi}$ admissible. Alors la trace de cet opérateur est bien définie. A $\tilde{\pi}$ est associé son caractère, qui est la distribution sur $C_c^\infty(\tilde{G}(F))$ définie par

$$I_{\tilde{G}}(\tilde{\pi},f)=trace(\tilde{\pi}(f)).$$

Si $g\in G(F)$ et si l'on note ${}^gf$ la fonction définie par ${}^gf(\gamma)=f(g^{-1}\gamma g)$, on a

$$I_{\tilde{G}}(\tilde{\pi},{}^gf)=\omega(g)^{-1}I_{\tilde{G}}(\tilde{\pi},f).$$

On note $D_{spec}(\tilde{G}(F);\omega)$ l'espace de distributions engendré par les caractères de $\omega$-représentations admissibles de longueur finie. Il est évidemment engendré par les caractères de $\omega$-représentations irréductibles. Une $\omega$-représentation irréductible a un caractère non nul si et seulement si elle est $G$-irréductible, cf. [L] proposition A.4.1. Tout élément $\pi\in Irr(G(F);\theta,\omega)$ détermine une droite $D_\pi$ dans $D_{spec}(\tilde{G}(F);\omega)$, à savoir la droite portée par le caractère de $\tilde{\pi}$, où $\tilde{\pi}$ est un prolongement quelconque de $\pi$ en une représentation de $\tilde{G}(F)$. On a

$$(1)\qquad D_{spec}(\tilde{G}(F);\omega)=\oplus_{\pi\in Irr(G(F);\theta,\omega)}D_\pi;$$

cf. [L] proposition A.4.1 dans le cas non archimédien ; la preuve est similaire dans le cas archimédien ;

(2) l'espace $D_{spec}(\tilde{G}(F);\omega)$ est formé de distributions localement intégrables sur $\tilde{G}(F)$ et lisses sur les éléments fortement réguliers.

Preuve. Notons $\mathbf{1}$ le caractère trivial de $G(F)$. Si $\omega=\mathbf{1}$, l'assertion est due à Bouaziz dans le cas archimédien ([B] théorème 2.1.1) et à Clozel dans le cas non-archimédien ([C]). Supposons qu'il existe un caractère unitaire $\mu$ de $G(F)$ tel que $\omega=\mu\circ(1-\theta)$ (cf. 2.4). Soit $\tilde{\pi}$ une $\omega$-représentation de $\tilde{G}(F)$ de représentation sous-jacente $\pi$. Posons $\pi_1=\pi\otimes\mu$. Fixons $\gamma_0\in\tilde{G}(F)$ et définissons $\tilde{\pi}_1$ par $\tilde{\pi}_1(g\gamma_0)=\mu(g)\tilde{\pi}(g\gamma_0)$. On vérifie que $\tilde{\pi}_1$ est une $\mathbf{1}$-représentation de $\tilde{G}(F)$, de représentation sous-jacente $\pi_1$. Son caractère est localement intégrable, donc associé à une fonction localement intégrable $\gamma\mapsto\Theta(\tilde{\pi}_1,\gamma)$ sur $\tilde{G}(F)$. Le caractère de $\tilde{\pi}$ est alors associé à la fonction $g\gamma_0\mapsto\mu(g)^{-1}\Theta(\tilde{\pi}_1,g\gamma_0)$, qui est elle-aussi localement intégrable. Dans le cas général, on introduit des objets $G'$, $\tilde{G}'$, $C$, $p$, $\tilde{p}$ vérifiant la proposition 2.4. On pose $\pi'=\pi\circ p$, $\tilde{\pi}'=\tilde{\pi}\circ\tilde{p}$, $\omega'=\omega\circ p$. Le terme $\tilde{\pi}'$ est une $\omega'$-représentation de $\tilde{G}'(F)$. L'hypothèse du cas précédent est vérifiée : $\omega'$ est de la forme $\mu'\circ(1-\theta')$. Donc le caractère de $\tilde{\pi}'$ est localement intégrable, associé à une fonction localement intégrable $\gamma'\mapsto\Theta(\tilde{\pi}',\gamma')$ sur $\tilde{G}'(F)$. Le caractère central de la représentation $\pi'$ est trivial sur $C(F)$ par construction. Il en résulte que la fonction ci-dessus est invariante par translations (à droite ou à gauche) par $C(F)$. Il existe donc une fonction $\gamma\mapsto\Theta(\tilde{\pi},\gamma)$ sur $\tilde{G}(F)$ telle que l'on ait l'égalité $\Theta(\tilde{\pi}',\gamma')=\Theta(\tilde{\pi},\tilde{p}(\gamma'))$ pour tout $\gamma'\in\tilde{G}'(F)$. On vérifie aisément que cette fonction est elle-aussi localement intégrable et que sa distribution associée est le caractère de $\tilde{\pi}$. $\square$

Soit $\tilde{M}$ un espace de Levi de $\tilde{G}$ tel que $M_0\subset M$ et soit $\tilde{\sigma}$ une $\omega$-représentation lisse de $\tilde{M}(F)$. Pour $\tilde{P}\in\mathcal{P}(\tilde{M})$, on définit l'induite habituelle $Ind_P^G(\sigma)$. On définit une représentation $\tilde{\pi}=Ind_{\tilde{P}}^{\tilde{G}}(\tilde{\sigma})$ de $\tilde{G}(F)$ dans l'espace de cette induite par la formule

$$(3)\qquad(\tilde{\pi}(\gamma)f)(g)=\omega(g')\delta_P(\gamma')^{1/2}\tilde{\sigma}(\gamma')f(g'),$$

où :

- on a écrit $g\gamma=\gamma'g'$, avec $\gamma'\in\tilde{M}(F)$ ;

- $\delta_P(\gamma')$ est la valeur absolue du déterminant de l'action de $ad_{\gamma'}$ dans l'algèbre de Lie du radical unipotent de $P$.

**Remarque.** Il peut arriver que $\tilde{\sigma}$ soit $M$-irréductible mais que $Ind_{\tilde{P}}^{\tilde{G}}(\tilde{\sigma})$ ait un caractère nul. Cela se produit quand $Ind_P^G(\sigma)$ n'est pas irréductible et que l'action de $\tilde{G}(F)$ permute sans point fixe ses composantes irréductibles. Donnons un exemple. Supposons $F$ non-archimédien et $G=SL_2$, prenons pour $M$ le tore diagonal et pour $P$ le Borel supérieur. Soient $\chi$ un caractère quadratique non trivial de $F^\times$ et $D\in F^\times$ tel que $\chi(D)=-1$. Supposons $\tilde{G}=\{x\in GL_2;det(x)=D\}$. Prenons pour $\sigma$ le caractère

$$\begin{pmatrix}a&0\\0&a^{-1}\end{pmatrix}\mapsto\chi(a)$$

de $M(F)$ et pour $\tilde{\sigma}$ la représentation

$$\begin{pmatrix}a&0\\0&d\end{pmatrix}\mapsto\chi(a)$$

de $\tilde{M}(F)$. On vérifie que le caractère de $Ind_{\tilde{P}}^{\tilde{G}}(\tilde{\sigma})$ coïncide avec la restriction à $\tilde{G}(F)$ du caractère de la représentation $\pi$ de $GL_2(F)$ induite du caractère $\chi\times1$ du tore diagonal. Or $\pi\simeq(\chi\circ det)\pi$, donc le caractère de $\pi$ est nul sur les éléments de $GL_2(F)$ de déterminant $D$.

## 2.6 Torsion par un caractère

Notons $G(F)^1$ le noyau de l'homomorphisme $H_{\tilde{G}}$. Il est invariant par $ad_\gamma$ pour tout $\gamma \in \tilde{G}(F)$. Posons $\tilde{\mathcal{A}}_{\tilde{G},F} = G(F)^1\backslash\tilde{G}(F) = \tilde{G}(F)/G(F)^1$ et notons $\tilde{H}_{\tilde{G}} : \tilde{G}(F) \to \tilde{\mathcal{A}}_{\tilde{G},F}$ la projection naturelle. L'ensemble $\tilde{\mathcal{A}}_{\tilde{G},F}$ est un espace principal homogène sous l'action de $\mathcal{A}_{\tilde{G},F}$ (les actions à gauche et à droite coïncident). On pose $\tilde{\mathcal{A}}_{\tilde{G}} = \mathcal{A}_{\tilde{G}} \otimes_{\mathcal{A}_{\tilde{G},F}} \tilde{\mathcal{A}}_{\tilde{G},F}$. C'est un espace affine sous $\mathcal{A}_{\tilde{G}}$. Par abus de notation, on note $\tilde{\mathcal{A}}^*_{\tilde{G}}$ l'espace des fonctions affines sur $\tilde{\mathcal{A}}_{\tilde{G}}$, c'est-à-dire les fonctions

$$\begin{array}{rccc} \tilde{\lambda}: & \tilde{\mathcal{A}}_{\tilde{G}} & \to & \mathbb{R} \\ & \tilde{H} & \mapsto & <\tilde{\lambda},\tilde{H}> \end{array}$$

telles qu'il existe $\lambda \in \mathcal{A}^*_{\tilde{G}}$ de sorte que $<\tilde{\lambda}, H+\tilde{H}>=<\lambda,H>+<\tilde{\lambda},\tilde{H}>$ pour tout $H \in \mathcal{A}_{\tilde{G}}$ et $\tilde{H} \in \tilde{\mathcal{A}}_{\tilde{G}}$. On définit de façon évidente le complexifié $\tilde{\mathcal{A}}^*_{\tilde{G},\mathbb{C}}$ et son sous-espace imaginaire $i\tilde{\mathcal{A}}^*_{\tilde{G}}$. On note $\tilde{\mathcal{A}}^\vee_{\tilde{G},F}$ le sous-groupe des $\tilde{\lambda} \in \tilde{\mathcal{A}}^*_{\tilde{G}}$ tels que $\tilde{\lambda}(\tilde{\mathcal{A}}_{\tilde{G},F}) \subset 2\pi\mathbb{Z}$. On pose $i\tilde{\mathcal{A}}^*_{\tilde{G},F} = (i\tilde{\mathcal{A}}^*_{\tilde{G}})/(i\tilde{\mathcal{A}}^\vee_{\tilde{G},F})$. On a des suites exactes

$$0 \to \mathbb{R} \to \tilde{\mathcal{A}}^*_{\tilde{G}} \to \mathcal{A}^*_{\tilde{G}} \to 0,$$

$$0 \to \mathbb{C} \to \tilde{\mathcal{A}}^*_{\tilde{G},\mathbb{C}} \to \mathcal{A}^*_{\tilde{G},\mathbb{C}} \to 0,$$

$$0 \to i\mathbb{R}/2\pi i\mathbb{Z} \to i\tilde{\mathcal{A}}^*_{\tilde{G},F} \to i\mathcal{A}^*_{\tilde{G},F} \to 0.$$

Le choix d'un point-base $\gamma \in \tilde{G}(F)$ scinde ses suites : on identifie par exemple $\tilde{\mathcal{A}}^*_{\tilde{G}}$ au sous-espace des fonctions affines qui valent 0 au point $\tilde{H}_{\tilde{G}}(\gamma)$. Pour $\tilde{\lambda} \in \tilde{\mathcal{A}}^*_{\tilde{G}}$ (ou $\tilde{\lambda} \in i\tilde{\mathcal{A}}^*_{\tilde{G},F}$), on note sans plus de commentaire $\lambda$ son image dans $\mathcal{A}^*_{\tilde{G}}$ (ou $i\mathcal{A}^*_{\tilde{G},F}$).

Soit $\tilde{\pi}$ une $\omega$-représentation lisse de $\tilde{G}(F)$. Pour $\tilde{\lambda} \in \tilde{\mathcal{A}}^*_{\tilde{G},\mathbb{C}}$, on définit la représentation $\tilde{\pi}_{\tilde{\lambda}}$ par $\tilde{\pi}_{\tilde{\lambda}}(\gamma) = e^{<\tilde{\lambda},\tilde{H}_{\tilde{G}}(\gamma)>}\tilde{\pi}(\gamma)$. Sa représentation sous-jacente de $G(F)$ est $\pi_\lambda$. Evidemment, $\tilde{\pi}_{\tilde{\lambda}}$ ne dépend que de l'image de $\tilde{\lambda}$ dans $\tilde{\mathcal{A}}^*_{\tilde{G},\mathbb{C}}/i\tilde{\mathcal{A}}^\vee_{\tilde{G},F}$. Remarquons que :

(1) si $\pi$ est irréductible, le stabilisateur de $\tilde{\pi}$ dans $i\tilde{\mathcal{A}}^*_{\tilde{G},F}$ s'identifie au stabilisateur $Stab(i\mathcal{A}^*_{\tilde{G},F},\pi)$ de $\pi$ dans $i\mathcal{A}^*_{\tilde{G},F}$.

Preuve. Il est clair que le premier groupe se projette injectivement dans le second. Inversement, soit $\lambda \in Stab(i\mathcal{A}^*_{\tilde{G},F},\pi)$ et fixons arbitrairement $\tilde{\lambda} \in i\tilde{\mathcal{A}}^*_{\tilde{G},F}$ au-dessus de $\lambda$. Alors $\tilde{\pi}_{\tilde{\lambda}}$ est isomorphe à une représentation prolongeant $\pi$, donc à $z\tilde{\pi}$ pour un certain $z \in \mathbb{C}^\times$. On en déduit $\tilde{\pi}_{n\tilde{\lambda}} \simeq z^n\tilde{\pi}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. On choisit $n$ tel que $n\lambda = 0$ dans $i\mathcal{A}^*_{\tilde{G},F}$. Alors $n\tilde{\lambda} \in i\mathbb{R}/2\pi i\mathbb{Z}$ et $\tilde{\pi}_{n\tilde{\lambda}} = e^{n\tilde{\lambda}}\tilde{\pi}$, donc $z^n = e^{n\tilde{\lambda}}$ et $z$ est de module 1. En écrivant $z = e^x$, avec $x \in i\mathbb{R}/2\pi i\mathbb{Z}$, l'élément $\tilde{\lambda} - x$ appartient au stabilisateur de $\tilde{\pi}$. $\square$

On devra considérer des fonctions à valeurs complexes $\varphi$ définies sur $\tilde{\mathcal{A}}_{\tilde{G},\mathbb{C}}$, resp. $i\tilde{\mathcal{A}}^*_{\tilde{G},F}$. La plupart vérifieront la condition

(2) pour tout $z \in \mathbb{C} \subset \tilde{\mathcal{A}}^*_{\tilde{G},\mathbb{C}}$ et tout $\tilde{\lambda} \in \tilde{\mathcal{A}}^*_{\tilde{G},\mathbb{C}}$, $\varphi(z+\tilde{\lambda}) = e^z\varphi(\tilde{\lambda})$

resp. une condition similaire. Modulo le choix d'un point-base permettant de scinder les suites exactes ci-dessus, une telle fonction s'identifie à une fonction sur $\mathcal{A}^*_{\tilde{G},\mathbb{C}}$, resp. $i\mathcal{A}^*_{\tilde{G},F}$.

Une fonction $\varphi : i\tilde{\mathcal{A}}^*_{\tilde{G},F} \to \mathbb{C}$ est dite de Paley-Wiener si et seulement s'il existe une fonction $b : \tilde{\mathcal{A}}_{\tilde{G},F} \to \mathbb{C}$, lisse et à support compact, de sorte que

$$\varphi(\tilde{\lambda}) = \int_{\tilde{\mathcal{A}}_{\tilde{G},F}} b(X)e^{<\tilde{\lambda},X>}\,dX.$$

Il revient au même de demander que $\varphi$ vérifie (2) et que la fonction sur $i\mathcal{A}^*_{\tilde{G},F}$ déduite de $\varphi$ comme ci-dessus soit de Paley-Wiener.

## 2.7 Caractères pondérés

Soit $\tilde{M}$ un espace de Levi de $\tilde{G}$ tel que $M_0 \subset M$. Soit $\tilde{\pi}$ une $\omega$-représentation admissible et de longueur finie de $\tilde{M}(F)$. Fixons $\tilde{P} \in \mathcal{P}(\tilde{M})$, introduisons la représentation $Ind_{\tilde{P}}^{\tilde{G}}(\tilde{\pi})$, que l'on réalise dans l'espace $V_{\pi,P}$. Supposons dans un premier temps que $\tilde{\pi}$ est en position générale, en ce sens que les opérateurs d'entrelacement intervenant ci-dessous sont bien définis. Pour $\tilde{Q} \in \mathcal{P}(\tilde{M})$, l'opérateur $J_{P|Q}(\pi)J_{Q|P}(\pi)$ est un automorphisme de $V_{\pi,P}$. Notons $\mu_{Q|P}(\pi)$ son inverse. Pour $\Lambda \in i\mathcal{A}^*_{\tilde{M}}$, posons

$$\mathcal{M}(\pi; \Lambda, \tilde{Q}) = \mu_{Q|P}(\pi)^{-1}\mu_{Q|P}(\pi_{\Lambda/2})J_{Q|P}(\pi)^{-1}J_{Q|P}(\pi_\Lambda).$$

On souligne la présence d'un indice $\Lambda/2$ dans cette formule. La famille $(\mathcal{M}(\pi; \Lambda, \tilde{Q}))_{\tilde{Q}\in\mathcal{P}(\tilde{M})}$ est une $(\tilde{G}, \tilde{M})$-famille à valeurs opérateurs. On en déduit un opérateur $\mathcal{M}^{\tilde{G}}_{\tilde{M}}(\pi; \Lambda)$. On pose $\mathcal{M}^{\tilde{G}}_{\tilde{M}}(\pi) = \mathcal{M}^{\tilde{G}}_{\tilde{M}}(\pi; 0)$. Si $F$ est archimédien, notons $C_c^\infty(\tilde{G}(F), K)$ le sous-espace des éléments de $C_c^\infty(\tilde{G}(F))$ qui sont $K$-finis à droite et à gauche. Pour unifier les notations, posons $C_c^\infty(\tilde{G}(F), K) = C_c^\infty(\tilde{G}(F))$ dans le cas où $F$ est non-archimédien. Le caractère pondéré de $\tilde{\pi}$ est la distribution sur $C_c^\infty(\tilde{G}(F), K)$ définie par

$$J^{\tilde{G}}_{\tilde{M}}(\tilde{\pi}, f) = trace(\mathcal{M}^{\tilde{G}}_{\tilde{M}}(\pi)Ind^{\tilde{G}}_{\tilde{P}}(\tilde{\pi}, f)).$$

On a choisi un parabolique $\tilde{P}$, mais on vérifie que cette trace ne dépend pas de ce choix.

**Remarque.** On verra en 5.4 que cette définition s'étend à tout $C_c^\infty(\tilde{G}(F))$ au moins si $\tilde{\pi}$ est tempérée.

Levons l'hypothèse que $\tilde{\pi}$ est en position générale. Pour $\tilde{\pi}$ quelconque et pour $\tilde{\lambda} \in \tilde{\mathcal{A}}^*_{\tilde{M},\mathbb{C}}$, $\tilde{\pi}_{\tilde{\lambda}}$ est en position générale pour $\tilde{\lambda}$ hors d'un sous-ensemble fermé de mesure nulle. On peut donc définir l'opérateur $\mathcal{M}^{\tilde{G}}_{\tilde{M}}(\pi_\lambda)$ et la distribution $f \mapsto J^{\tilde{G}}_{\tilde{M}}(\tilde{\pi}_{\tilde{\lambda}}, f)$ pour $\tilde{\lambda}$ dans un ouvert dense. Il est clair que ces termes vérifient la condition (2) de 2.6 et s'étendent en des fonctions méromorphes de $\tilde{\lambda}$ définies pour tout $\tilde{\lambda}$. Si ces fonctions sont régulières en $\tilde{\lambda} = 0$, on définit $\mathcal{M}^{\tilde{G}}_{\tilde{M}}(\pi)$ et $J^{\tilde{G}}_{\tilde{M}}(\tilde{\pi}, f)$ comme leurs valeurs en ce point $\tilde{\lambda} = 0$.

**Proposition**. *Si $\tilde{\pi}$ est unitaire, les fonctions ci-dessus sont régulières en $\tilde{\lambda} = 0$.*

Cf. [A4] proposition 2.3. Arthur traite le cas d'une représentation irréductible d'un groupe connexe mais sa preuve s'étend à notre situation.

Remarquons que, dans notre construction, on n'a pas imposé à $\tilde{\pi}$ d'être irréductible. On vérifie que l'opérateur $\mathcal{M}^{\tilde{G}}_{\tilde{M}}(\pi)$ dépend fonctoriellement de $\tilde{\pi}$, pourvu qu'il soit défini, et que, si l'on a une suite exacte

$$1 \to \tilde{\pi}_1 \to \tilde{\pi}_2 \to \tilde{\pi}_3 \to 1,$$

on a l'égalité

$$(1) \qquad J^{\tilde{G}}_{\tilde{M}}(\tilde{\pi}_2, f) = J^{\tilde{G}}_{\tilde{M}}(\tilde{\pi}_1, f) + J^{\tilde{G}}_{\tilde{M}}(\tilde{\pi}_3, f),$$

pourvu que tous les termes soient définis.

On a :

(2) supposons que $\tilde{\pi}$ soit irréductible mais pas $M$-irréductible; alors $J_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(\tilde{\pi}, f) = 0$ pourvu que ce terme soit défini.

Preuve. Puisque $\tilde{\pi}_{\tilde{\lambda}}$ vérifie les mêmes hypothèses que $\tilde{\pi}$, il suffit de considérer le cas où $\tilde{\pi}$ est en position générale. La décomposition de $\pi$ en composantes irréductibles pour $M(F)$ induit une décomposition de $Ind_P^G(\pi)$. L'opérateur $\mathcal{M}_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(\pi)$ préserve chaque composante tandis que $Ind_{\tilde{P}}^{\tilde{G}}(\tilde{\pi}, f)$ les permute sans point fixe. □

Plus généralement,

(3) supposons que le caractère de $\tilde{\pi}$ soit nul; alors $J_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(\tilde{\pi}, f) = 0$ pourvu que ce terme soit défini.

Preuve. On peut encore supposer $\tilde{\pi}$ en position générale. Grâce à (1), on peut supposer que $\tilde{\pi}$ est somme d'irréductibles. On peut supprimer les irréductibles non $M$-irréductibles : cela ne modifie pas l'hypothèse puisque leur caractère est nul, ni la conclusion d'après (2). Notons $\rho_1, ..., \rho_k$ les différentes représentations irréductibles de $M(F)$ intervenant dans $\pi$. Pour chaque $\rho_i$, fixons un prolongement $\tilde{\rho}_i$ de $\rho_i$ à $\tilde{M}(F)$. Alors on a une égalité

$$\tilde{\pi} = \oplus_{i=1,...,k} \oplus_{j=1,...,l_i} z_{i,j}\tilde{\rho}_i,$$

pour des familles $(z_{i,j})_{j=1,...,l_i}$ de nombres complexes. On a alors

$$J_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(\tilde{\pi}, f) = \sum_{i=1,...,k} (\sum_{j=1,...,l_j} z_{i,j}) J_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(\tilde{\rho}_i, f).$$

D'après 2.5(1), l'hypothèse implique que $\sum_{j=1,...,l_j} z_{i,j} = 0$ pour tout $i$. D'où la conclusion. □

**Remarque.** Le terme $J_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(\tilde{\sigma}, f)$ dépend de la mesure sur $G(F)$ (nécessaire pour définir $Ind_{\tilde{P}}^{\tilde{G}}(\tilde{\sigma}, f)$) et de la mesure sur $\mathcal{A}_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}$ (nécessaire pour définir le terme $\mathcal{M}_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(\sigma)$). Il ne dépend d'aucune autre mesure.

## 2.8 $R$-groupes tordus

Soient $M$ un Levi semi-standard de $G$ et $\sigma$ une représentation irréductible et de la série discrète de $M(F)$. On note $\mathcal{N}^{\tilde{G}}(\sigma)$ l'ensemble des couples $(A, \gamma)$ où $A$ est un automorphisme unitaire de $V_\sigma$ et $\gamma \in Norm_{\tilde{G}(F)}(M)$ (c'est-à-dire $\gamma \in \tilde{G}(F)$ et $ad_\gamma(M) = M$) qui vérifient la condition

$$\sigma(ad_\gamma(x)) \circ A = \omega(x) A \circ \sigma(x)$$

pour tout $x \in M(F)$. Le groupe $\mathcal{N}^G(\sigma)$ agit à gauche et à droite sur $\mathcal{N}^{\tilde{G}}(\sigma)$ par

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{N}^G(\sigma) \times \mathcal{N}^{\tilde{G}}(\sigma) \times \mathcal{N}^G(\sigma) & \to & \mathcal{N}^{\tilde{G}}(\sigma) \\ ((A', n'), (A, \gamma), (A'', n'')) & \mapsto & (A'AA''\omega(n''), n'\gamma n''). \end{array}$$

L'ensemble $\mathcal{N}^{\tilde{G}}(\sigma)$ peut être vide. Supposons qu'il ne l'est pas. C'est alors un espace principal homogène sous $\mathcal{N}^G(\sigma)$, pour l'une ou l'autre des deux actions.

Soit $P \in \mathcal{P}(M)$, posons $\pi = Ind_P^G(\sigma)$. On définit une application $\tilde{\nabla}_P$ de $\mathcal{N}^{\tilde{G}}(\sigma)$ dans le groupe des opérateurs unitaires de $V_\pi$ de la façon suivante. Soit $(A, \gamma) \in \mathcal{N}^{\tilde{G}}(\sigma)$. Alors $\tilde{\nabla}_P(A, \gamma)$ est la composée des opérateurs suivants :

- l'opérateur $e \mapsto A \circ e$ de $V_\pi$ dans $V_{\pi_1}$, où $\pi_1 = Ind_P^G(\omega^{-1}(\sigma \circ ad_\gamma))$ ;
- l'opérateur $\boldsymbol{\omega}$ de $V_{\pi_1}$ dans $V_{\pi_2}$, où $\pi_2 = Ind_P^G(\sigma \circ ad_\gamma)$, qui à $e \in V_{\pi_1}$, associe la fonction $g \mapsto \omega(g)e(g)$ ;
- l'opérateur $e \mapsto \partial_P(\gamma)^{1/2} e \circ ad_\gamma^{-1}$ de $V_{\pi_2}$ dans $V_{\pi'}$, où $\pi' = Ind_{ad_\gamma(P)}^G(\sigma)$ et $\partial_P(\gamma)$ est le jacobien de l'application $ad_\gamma : U_P(F) \to U_{ad_\gamma(P)}(F)$ ;
- l'opérateur $R_{P|ad\gamma(P)}(\sigma) : V_{\pi'} \to V_\pi$.

On vérifie les relations

(1) $\quad \pi(ad_\gamma(g)) \circ \tilde{\nabla}_P(A,\gamma) = \omega(g)\tilde{\nabla}_P(A,\gamma) \circ \pi(g)$ pour tout $g \in G(F)$ ;

(2) $\quad \pi(n')r_P(A',n')\tilde{\nabla}_P(A,\gamma)r_P(A'',n'')\pi(n'')\omega(n'') = \tilde{\nabla}_P(A'AA''\omega(n''), n'\gamma n'')$ pour tous $(A',n'),(A'',n'') \in \mathcal{N}^G(\sigma)$ et $(A,\gamma) \in \mathcal{N}^{\tilde{G}}(\sigma)$.

Il s'en déduit que si $(A',n')(A,\gamma) = (A,\gamma)(A'',n'')$, on a l'égalité

$$(3) \qquad r_P(A',n')\tilde{\nabla}_P(A,\gamma) = \tilde{\nabla}_P(A,\gamma)r_P(A'',n'').$$

On vérifie directement que les orbites dans $\mathcal{N}^{\tilde{G}}(\sigma)$ pour l'action du sous-groupe $M(F) \subset \mathcal{N}^G(\sigma)$ sont les mêmes, que l'on considère l'action à gauche ou l'action à droite. Notons $\mathcal{W}^{\tilde{G}}(\sigma)$ l'ensemble de ces orbites. Grâce à (3), les orbites dans $\mathcal{W}^{\tilde{G}}(\sigma)$ pour l'action de $W_0^G(\sigma)$ sont les mêmes, que l'on considère l'action à gauche ou l'action à droite. Notons $\mathcal{R}^{\tilde{G}}(\sigma)$ l'ensemble de ces orbites. L'ensemble $\mathcal{R}^{\tilde{G}}(\sigma)$ est un espace principal homogène sous l'action à droite ou à gauche de $\mathcal{R}^G(\sigma)$. Posons

$$W^{\tilde{G}}(\sigma) = \{\gamma \in \tilde{G}(F); ad_\gamma(M) = M, \sigma \circ ad_\gamma \simeq \sigma \otimes \omega\}/M(F),$$

et $R^{\tilde{G}}(\sigma) = W^{\tilde{G}}(\sigma)/W_0^G(\sigma)$. On a une application surjective

$$\mathcal{R}^{\tilde{G}}(\sigma) \to R^{\tilde{G}}(\sigma)$$

dont les fibres sont isomorphes à $\mathbb{U}$.

Soit $\tilde{\lambda} \in i\tilde{\mathcal{A}}^*_{\tilde{G},F}$. L'application

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{N}^{\tilde{G}}(\sigma) & \to & \mathcal{N}^{\tilde{G}}(\sigma_\lambda) \\ (A,\gamma) & \mapsto & (Ae^{<\tilde{\lambda},\tilde{H}_{\tilde{G}}(\gamma)>},\gamma) \end{array}$$

est bijective. Il s'en déduit une bijection $\mathcal{R}^{\tilde{G}}(\sigma) \simeq \mathcal{R}^{\tilde{G}}(\sigma_\lambda)$ compatible avec l'identité $R^{\tilde{G}}(\sigma) = R^{\tilde{G}}(\sigma_\lambda)$. Ces bijections sont aussi compatibles avec les isomorphismes $\mathcal{N}^G(\sigma) \simeq \mathcal{N}^G(\sigma_\lambda)$ et $\mathcal{R}^G(\sigma) \simeq \mathcal{R}^G(\sigma_\lambda)$.

Soit $g \in G(F)$ tel que $M' = gMg^{-1}$ soit semi-standard. Posons $\sigma' = g\sigma = \sigma \circ ad_g^{-1}$. On définit une application

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{N}^{\tilde{G}}(\sigma) & \to & \mathcal{N}^{\tilde{G}}(\sigma') \\ (A,\gamma) & \mapsto & (A\omega(g), g\gamma g^{-1}). \end{array}$$

Elle est bijective et se quotiente en des bijections $\mathcal{R}^{\tilde{G}}(\sigma) \simeq \mathcal{R}^{\tilde{G}}(\sigma')$, $R^{\tilde{G}}(\sigma) \simeq R^{\tilde{G}}(\sigma')$. On note toutes ces applications $ad_g$. Ce sont ces applications qui servent à définir les notions de conjugaison par $G(F)$ utilisées dans la suite. Par exemple, pour $\tilde{\boldsymbol{r}} \in \mathcal{R}^{\tilde{G}}(\sigma)$, on dit que les triplets $(M,\sigma,\tilde{\boldsymbol{r}})$ et $(M',\sigma',ad_g(\tilde{\boldsymbol{r}}))$ sont conjugués.

Appelons représentation de $\mathcal{R}^{\tilde{G}}(\sigma)$ un couple $(\rho,\tilde{\rho})$, où $\rho$ est une représentation (disons unitaire et de dimension finie) de $\mathcal{R}^G(\sigma)$ et $\tilde{\rho}$ est un homomorphisme de $\mathcal{R}^{\tilde{G}}(\sigma)$ dans le groupe des automorphismes de $V_\rho$ vérifiant la condition

$$\rho(\mathbf{r}')\tilde{\rho}(\tilde{\boldsymbol{r}})\rho(\mathbf{r}'') = \tilde{\rho}(\mathbf{r}'\tilde{\boldsymbol{r}}\mathbf{r}'')$$

pour tous $\mathbf{r}', \mathbf{r}'' \in \mathcal{R}^G(\sigma)$, $\tilde{\boldsymbol{r}} \in \mathcal{R}^{\tilde{G}}(\sigma)$. On dit que $\tilde{\rho}$ est $\mathcal{R}^G(\sigma)$-irréductible si $\rho$ est irréductible. Le groupe $\mathbb{U}$ agit par multiplication sur ces représentations. Par ailleurs, tout élément $\tilde{\boldsymbol{r}} \in \mathcal{R}^{\tilde{G}}(\sigma)$ détermine un automorphisme $\theta_{\tilde{\boldsymbol{r}}}$ de $\mathcal{R}^G(\sigma)$ par l'égalité $\tilde{\boldsymbol{r}}\mathbf{r} = \theta_{\tilde{\boldsymbol{r}}}(\mathbf{r})\tilde{\boldsymbol{r}}$. Notons $\theta_{\mathcal{R}}$ sa classe modulo automorphismes intérieurs, qui ne dépend pas du choix de $\tilde{\boldsymbol{r}}$. Alors les orbites de $\mathbb{U}$ dans l'ensemble des classes de représentations $\mathcal{R}^G(\sigma)$-irréductibles de $\mathcal{R}^{\tilde{G}}(\sigma)$ sont en bijection avec l'ensemble $Irr(\mathcal{R}^G(\sigma); \theta_{\mathcal{R}})$ des représentations irréductibles $\rho$ de $\mathcal{R}^G(\sigma)$ telles que $\rho \circ \theta_{\mathcal{R}} \simeq \rho$.

Considérons la décomposition 1.11(2) de l'espace $V_\pi$. Soit $\rho \in Irr(\mathcal{R}^G(\sigma))$. La relation (3) implique que, pour $(A, \gamma) \in \mathcal{N}^{\tilde{G}}(\sigma)$, $\tilde{\nabla}_P(A, \gamma)$ envoie la composante $\rho$-isotypique $\rho \otimes \pi_\rho$ sur la composante isotypique $(\rho \circ \theta_{\mathcal{R}}) \otimes \pi_{\rho \circ \theta_{\mathcal{R}}}$. La relation (1) entraîne alors que $\pi_{\rho\circ\theta_{\mathcal{R}}} \circ \theta \simeq \omega\pi_\rho$. En particulier, $\pi_\rho \circ \theta \simeq \omega\pi_\rho$ si et seulement si $\rho \in Irr(\mathcal{R}^G(\sigma), \theta_{\mathcal{R}})$. Supposons cette relation vérifiée et choisissons une représentation $\tilde{\rho}$ de $\mathcal{R}^{\tilde{G}}(\sigma)$ prolongeant $\rho$. Alors il existe une unique représentation $\tilde{\pi}_{\tilde{\rho}}$ de $\tilde{G}(F)$ prolongeant $\pi_\rho$ de sorte que, pour tout $(A, \gamma) \in \mathcal{N}^{\tilde{G}}(\sigma)$, la restriction de $\tilde{\nabla}_P(A, \gamma)$ à $\rho \otimes \pi_\rho$ soit égale à $\tilde{\rho}(\tilde{\boldsymbol{r}}) \otimes \tilde{\pi}_{\tilde{\rho}}(\gamma)$, où $\tilde{\boldsymbol{r}}$ est l'image de $(A, \gamma)$ dans $\mathcal{R}^{\tilde{G}}(\sigma)$.

Ainsi, à un triplet $(M, \sigma, \rho)$, où $M$ est un Levi semi-standard, $\sigma$ est une représentation irréductible de la série discrète de $M(F)$ telle que $\mathcal{N}^{\tilde{G}}(\sigma) \neq \emptyset$ et $\rho \in Irr(\mathcal{R}^G(\sigma); \theta_{\mathcal{R}})$, on a associé une représentation $G$-irréductible et tempérée $\tilde{\pi}_{\tilde{\rho}}$ de $\tilde{G}(F)$, uniquement définie à multiplication près par $\mathbb{U}$. Comme en 1.11, on voit que cette correspondance ne dépend pas du sous-groupe parabolique $P$ choisi. Sur l'ensemble des triplets $(M, \sigma, \rho)$, on définit de façon évidente la relation de conjugaison par $G(F)$. La construction ci-dessus se quotiente en une bijection entre l'ensemble des classes de conjugaison par $G(F)$ de triplets $(M, \sigma, \rho)$ et l'ensemble des orbites de $\mathbb{U}$ dans l'ensemble des classes d'isomorphisme de représentations $G$-irréductibles et tempérées de $\tilde{G}(F)$.

## 2.9 L'ensemble $E(\tilde{G}, \omega)$

Soient $M$ et $\sigma$ comme dans le paragraphe précédent. On suppose $\mathcal{N}^{\tilde{G}}(\sigma) \neq \emptyset$. On fixe $P \in \mathcal{P}(M)$ et on note $\pi = Ind_P^G(\sigma)$. Soit $(A, \gamma) \in \mathcal{N}^{\tilde{G}}(\sigma)$. Grâce à 2.7(1), on peut définir une $\omega$-représentation $\tilde{\pi}$ de $\tilde{G}(F)$ par la formule

$$\tilde{\pi}(g\gamma) = \pi(g)\tilde{\nabla}_P(A, \gamma)$$

pour tout $g \in G(F)$. Notons que cette représentation n'est pas irréductible en général. La relation 2.7(2) montre que $\tilde{\pi}$ ne dépend que de l'image $\tilde{\boldsymbol{r}}$ de $(A, \gamma)$ dans $\mathcal{R}^{\tilde{G}}(\sigma)$. Elle ne dépend donc que du triplet $\boldsymbol{\tau} = (M, \sigma, \tilde{\boldsymbol{r}})$ et on peut la noter $\tilde{\pi}_{\boldsymbol{\tau}}$. On voit aussi que sa classe ne dépend pas de $P$. On vérifie que la classe de $\tilde{\pi}_{\boldsymbol{\tau}}$ ne dépend que de la classe de conjugaison par $G(F)$ du triplet $\boldsymbol{\tau}$ (cf. 2.8 pour cette notion de conjugaison). Il est tout aussi clair que la correspondance est équivariante pour les actions de $\mathbb{U}$ : pour $z \in \mathbb{U}$, la représentation correspondant à $(M, \sigma, z\tilde{\boldsymbol{r}})$ est $z\tilde{\pi}_{\boldsymbol{\tau}}$. Le groupe $\mathcal{R}^G(\sigma)$ agissant à gauche et à droite sur $\mathcal{R}^{\tilde{G}}(\sigma)$, il agit aussi par conjugaison. Pour $\tilde{\boldsymbol{r}} \in \mathcal{R}^{\tilde{G}}(\sigma)$, il peut exister $z \in \mathbb{U}$, $z \neq 1$, tel que $z\tilde{\boldsymbol{r}}$ soit conjugué à $\tilde{\boldsymbol{r}}$. Dans ce cas, $z\tilde{\pi} \simeq \tilde{\pi}$ donc le caractère de $\tilde{\pi}$ est nul. On dit que le triplet $(M, \sigma, \tilde{\boldsymbol{r}})$ est essentiel si la classe de conjugaison de $\tilde{\boldsymbol{r}}$ par $\mathcal{R}^G(\sigma)$ ne coupe $\mathbb{U}\tilde{\boldsymbol{r}}$ qu'en le point $\tilde{\boldsymbol{r}}$. On note $\mathcal{E}(\tilde{G}, \omega)$ l'ensemble des triplets $(M, \sigma, \tilde{\boldsymbol{r}})$ qui sont essentiels.

Soit $\boldsymbol{\tau} = (M, \sigma, \tilde{\boldsymbol{r}})$ un triplet comme ci-dessus et soit $\tilde{\lambda} \in i\tilde{\mathcal{A}}^*_{\tilde{G},F}$. A l'aide de $\tilde{\lambda}$, on a défini en 2.8 un isomorphisme $\mathcal{R}^{\tilde{G}}(\sigma) \simeq \mathcal{R}^{\tilde{G}}(\sigma_\lambda)$. En identifiant ces deux ensembles, le triplet $\boldsymbol{\tau}_{\tilde{\lambda}} = (M, \sigma_\lambda, \tilde{\boldsymbol{r}})$ vérifie encore les conditions requises. On vérifie que $\boldsymbol{\tau}$ est essentiel si et seulement si $\boldsymbol{\tau}_{\tilde{\lambda}}$ l'est et qu'on a l'égalité $\tilde{\pi}_{\boldsymbol{\tau}_{\tilde{\lambda}}} = (\tilde{\pi}_{\boldsymbol{\tau}})_{\tilde{\lambda}}$.

On note $E(\tilde{G}, \omega)$ l'ensemble des triplets $(M, \sigma, \tilde{r})$, où $(M, \sigma)$ est comme ci-dessus, $\tilde{r} \in R^{\tilde{G}}(\sigma)$ et il existe $\tilde{\boldsymbol{r}} \in \mathcal{R}^{\tilde{G}}(\sigma)$ relevant $\tilde{r}$ de sorte que le triplet $(M, \sigma, \tilde{\boldsymbol{r}})$ soit essentiel. Autrement dit, $E(\tilde{G}, \omega)$ est le quotient de $\mathcal{E}(\tilde{G}, \omega)$ par l'action naturelle de $\mathbb{U}$. On note $E(\tilde{G}, \omega)/conj$ l'ensemble des classes de conjugaison par $G(F)$ dans l'ensemble $E(\tilde{G}, \omega)$. Pour $\boldsymbol{\tau} \in \mathcal{E}(\tilde{G}, \omega)$, l'espace porté par le caractère de $\tilde{\pi}_{\boldsymbol{\tau}}$, c'est-à-dire $\{0\}$ si ce caractère est nul et une droite sinon, ne dépend que de l'image $\tau$ de $\boldsymbol{\tau}$ dans $E(\tilde{G}, \omega)$. On le note $D_\tau$. Il ne dépend aussi que de la classe de conjugaison de $\tau$. On a défini l'espace $D_{spec}(\tilde{G}(F); \omega)$ en 2.5. On note $D_{temp}(\tilde{G}(F); \omega)$ le sous-espace engendré par les caractères de $\omega$-représentations tempérées.

**Proposition**. *(i) Pour tout $\boldsymbol{\tau} \in \mathcal{E}(\tilde{G}, \omega)$, le caractère de $\tilde{\pi}_{\boldsymbol{\tau}}$ est non nul.*

*(ii) On a l'égalité*

$$D_{temp}(\tilde{G}(F); \omega) = \oplus_{\tau \in E(\tilde{G}, \omega)/conj} D_\tau.$$

Preuve. Pour tout couple $(M, \sigma)$ comme en 2.8 et pour tout $\rho \in Irr(\mathcal{R}^G(\sigma), \theta_{\mathcal{R}})$, on fixe une extension $\tilde{\rho}$ de $\rho$ à $\mathcal{R}^{\tilde{G}}(\sigma)$. Pour tout $\tilde{r} \in R^{\tilde{G}}(\sigma)$, on fixe aussi un relèvement $\tilde{\boldsymbol{r}} \in \mathcal{R}^{\tilde{G}}(\sigma)$. Pour tout triplet $\beta = (M, \sigma, \rho)$ comme en 2.8, on pose $\tilde{\pi}_\beta = \tilde{\pi}_{\tilde{\rho}}$ et, pour tout $\tau = (M, \sigma, \tilde{r}) \in E(\tilde{G}, \omega)$, on pose $\tilde{\pi}_\tau = \tilde{\pi}_{\boldsymbol{\tau}}$, où $\boldsymbol{\tau} = (M, \sigma, \tilde{\boldsymbol{r}})$. On a décrit les $\omega$-représentations tempérées et $G$-irréductibles en 2.8, à l'aide de triplets $\beta = (M, \sigma, \rho)$. L'espace $D_{temp}(\tilde{G}(F); \omega)$ est somme directe des $D_{\tilde{\pi}_\beta}$ quand $\beta$ décrit les classes de conjugaison de triplets $\beta$. Il nous suffit de prouver l'assertion suivante. Fixons un couple $(M, \sigma)$. Notons $(\tau_i)_{i=1,\dots,n}$ les différents éléments de $E(\tilde{G}, \omega)$ de la forme $(M, \sigma, \tilde{r}_i)$ et notons $(\beta_j)_{j=1,\dots,m}$ les differents triplets comme ci-dessus de la forme $(M, \sigma, \rho_j)$. Notons $X$ la matrice colonne à $n$ lignes dont les coefficients sont les caractères $trace(\tilde{\pi}_{\tau_i})$ des $\tilde{\pi}_{\tau_i}$ et notons $Y$ la matrice colonne à $m$ lignes dont les coefficients sont les caractères $trace(\tilde{\pi}_{\beta_j})$ des $\tilde{\pi}_{\beta_j}$. Alors

(1) il existe une matrice à coefficients complexes $M$ telle que $X = MY$ et $M$ est inversible.

Soit $(A_i, \gamma_i) \in \mathcal{N}^{\tilde{G}}(\sigma)$ se projetant sur $\tilde{\boldsymbol{r}}_i$. On a vu en 2.8 que l'opérateur $\tilde{\nabla}_P(A_i, \gamma_i)$ se restreint à une composante $\rho_j \otimes \pi_{\rho_j}$ en l'opérateur $\tilde{\rho}_j(\tilde{\boldsymbol{r}}_i) \otimes \tilde{\pi}_{\beta_j}(\gamma)$ et qu'il permute sans point fixe les composantes $\rho \otimes \pi_\rho$ pour $\rho \notin Irr(\mathcal{R}^G(\sigma), \theta_{\mathcal{R}})$. Il résulte alors de la définition de $\tilde{\pi}_{\tau_i}$ que l'on a l'égalité

$$trace(\tilde{\pi}_{\tau_i}) = \sum_{j=1,\dots,m} trace(\tilde{\rho}_j(\tilde{\boldsymbol{r}}_i)) trace(\tilde{\pi}_{\beta_j}).$$

Autrement dit, la matrice $M = (trace(\tilde{\rho}_j(\tilde{\boldsymbol{r}}_i)))_{i=1,\dots,n; j=1,\dots,m}$ vérifie $X = MY$. On va montrer que $M$ est inversible. Le groupe $\mathcal{R}^G(\sigma)$ est une extension de $R^G(\sigma)$ par $\mathbb{U}$. Le groupe $R^G(\sigma)$ étant fini, l'extension provient d'une extension par un sous-groupe fini $Z \subset \mathbb{U}$. Substituons ce groupe $Z$ à $\mathbb{U}$ dans toutes les constructions. Fixons $\tilde{\boldsymbol{r}} \in \mathcal{R}^{\tilde{G}}(\sigma)$. On en déduit un automorphisme $\theta_{\tilde{\boldsymbol{r}}}$ de $\mathcal{R}^G(\sigma)$. Fixons un entier $N \geq 2$ tel que l'ordre de $\theta_{\tilde{\boldsymbol{r}}}$ divise $N$. Introduisons le produit semi-direct $H = \mathcal{R}^G(\sigma) \rtimes (\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})$ où $k \in \mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$ agit par $(\theta_{\tilde{\boldsymbol{r}}})^k$. On identifie $\mathcal{R}^{\tilde{G}}(\sigma)$ à la composante $\mathcal{R}^G(\sigma) \times \{1\}$ en envoyant $\mathbf{r}\tilde{\boldsymbol{r}}$ sur $(\mathbf{r}, 1)$, pour tout $\mathbf{r} \in \mathcal{R}^G(\sigma)$. On est ramené à un problème concernant les représentations irréductibles du groupe fini $H$. Sa solution est bien connue, indiquons simplement le résultat. Pour tout $\tilde{r} \in R^{\tilde{G}}(\sigma)$, notons $Stab(R^G(\sigma), \tilde{r})$ le stabilisateur de $\tilde{r}$ dans $R^G(\sigma)$ (agissant par conjugaison dans $R^{\tilde{G}}(\sigma)$). Introduisons la matrice

$$M' = (|Stab(R^G(\sigma), \tilde{r}_i)|^{-1}\overline{trace(\tilde{\rho}_j(\tilde{\boldsymbol{r}}_i))})_{i=1,\dots,n;j=1,\dots,m}.$$

Alors la transposée de $M'$ est l'inverse de $M$. $\square$

Le groupe $i\mathcal{A}^*_{\tilde{G},F}$ agit naturellement sur $E(\tilde{G}, \omega)$ : pour $\lambda \in i\mathcal{A}^*_{\tilde{G},F}$ et pour $\tau = (M, \sigma, \tilde{r})$, on pose $\tau_\lambda = (M, \sigma_\lambda, \tilde{r})$. Ainsi, on dispose d'une action de $W^G \times i\mathcal{A}^*_{\tilde{G},F}$ sur $E(\tilde{G}, \omega)$. Pour $\tau \in E(\tilde{G}, \omega)$, on note $Stab(W^G \times i\mathcal{A}^*_{\tilde{G},F}, \tau)$ son stabilisateur dans $W^G \times i\mathcal{A}^*_{\tilde{G},F}$. C'est un groupe fini qui contient le stabilisateur $Stab(i\mathcal{A}^*_{\tilde{G},F}, \sigma)$ de $\sigma$ dans $i\mathcal{A}^*_{\tilde{G},F}$. Il contient aussi le groupe $W^M$ comme sous-groupe distingué et son quotient $Stab(W^G \times i\mathcal{A}^*_{\tilde{G},F}, \tau)/W^M$ contient $W_0^G(\sigma)$ comme sous-groupe distingué. On pose

$$\mathbf{Stab}(W^G \times i\mathcal{A}^*_{\tilde{G},F}, \tau) = (Stab(W^G \times i\mathcal{A}^*_{\tilde{G},F}, \tau)/W^M)/W_0^G(\sigma).$$

Remarquons que $\mathbf{Stab}(W^G \times i\mathcal{A}^*_{\tilde{G},F}, \tau_\lambda) = \mathbf{Stab}(W^G \times i\mathcal{A}^*_{\tilde{G},F}, \tau)$ pour $\lambda \in i\mathcal{A}^*_{\tilde{G},F}$ et que $|\mathbf{Stab}(W^G \times i\mathcal{A}^*_{\tilde{G},F}, \tau)|$ ne dépend que de l'image de $\tau$ dans $E(\tilde{G}, \omega)/conj$.

**Remarque.** Le groupe $Stab(W^G \times i\mathcal{A}^*_{\tilde{G},F}, \tau)$ peut être plus gros que le produit des stabilisateurs de $\tau$ dans chacun des groupes $W^G$ et $i\mathcal{A}^*_{\tilde{G},F}$ : on peut avoir une relation $w\sigma \simeq \sigma_\lambda \not\simeq \sigma$.

## 2.10 Triplets et induction

Soit $\tilde{L}$ un espace de Levi de $\tilde{G}$ contenant $\tilde{M}_0$, soit $M$ un Levi semi-standard de $L$ et soit $\sigma$ une représentation irréductible et de la série discrète de $M(F)$. Le groupe $\mathcal{N}^L(\sigma)$ est contenu dans $\mathcal{N}^G(\sigma)$ et l'ensemble $\mathcal{N}^{\tilde{L}}(\sigma)$ est contenu dans l'ensemble $\mathcal{N}^{\tilde{G}}(\sigma)$. Fixons $\tilde{Q} \in \mathcal{P}(\tilde{L})$ et $P \in \mathcal{P}(M)$ tel que $P \subset Q$. Posons $\Pi = Ind_P^G(\sigma)$, $\pi = Ind_{P\cap L}^L(\sigma)$. On sait que $Ind_Q^G(\pi) \simeq \Pi$. Dans les modèles naturels, l'isomorphisme envoie une fonction $e$ du premier espace sur la fonction $g \mapsto (e(g))(1)$. Soit $(A, n) \in \mathcal{N}^L(\sigma)$. On dispose de l'entrelacement $r^L_{P\cap L}(A, n)$ de $\pi$ et de l'entrelacement $r_P(A, n)$ de $\Pi$. On a

(1) $r_P(A, n)$ s'identifie à l'opérateur déduit par fonctorialité de $r^L_{P\cap L}(A, n)$.

C'est un simple calcul utilisant le fait que l'opérateur $R_{P|ad_n(P)}(\sigma)$ se déduit par fonctorialité de $R^L_{P|ad_n(P)}(\sigma)$.

Puisque $W_0^G(\sigma)$ est par définition le noyau de $(A, n) \mapsto r_P(A, n)$ dans $\mathcal{N}^G(\sigma)/M(F)$ et de même pour $W_0^L(\sigma)$ , on déduit de (1) que $W_0^L(\sigma) = W_0^G(\sigma) \cap (\mathcal{N}^L(\sigma)/M(F))$. Alors, d'après les définitions, les plongements $\mathcal{N}^L(\sigma) \to \mathcal{N}^G(\sigma)$ et $\mathcal{N}^{\tilde{L}}(\sigma) \to \mathcal{N}^{\tilde{G}}(\sigma)$ se quotientent en des plongements $\mathcal{R}^L(\sigma) \to \mathcal{R}^G(\sigma)$ et $\mathcal{R}^{\tilde{L}}(\sigma) \to \mathcal{R}^{\tilde{G}}(\sigma)$. Evidemment, on a aussi des plongements $R^L(\sigma) \to R^G(\sigma)$ et $R^{\tilde{L}}(\sigma) \to R^{\tilde{G}}(\sigma)$. Supposons $\mathcal{R}^{\tilde{L}}(\sigma) \neq \emptyset$.

**Remarque.** Cette hypothèse entraîne que la restriction de $\omega$ à $Z_L(F)^\theta$ est triviale.

Soit $\tilde{\boldsymbol{r}} \in \mathcal{R}^{\tilde{L}}(\sigma)$, posons $\boldsymbol{\tau} = (M, \sigma, \tilde{\boldsymbol{r}})$. On peut considérer ce triplet relativement à chacun des espaces ambiants $\tilde{L}$ ou $\tilde{G}$. Remarquons que la notion de triplet essentiel dépend de l'espace ambiant. Si le triplet est essentiel relativement à $\tilde{G}$, il l'est relativement à $\tilde{L}$, mais la réciproque semble fausse en général (je dis semble car je n'ai pas d'exemple). Notons qu'associer une $\omega$-représentation à un triplet ne nécessite pas que le triplet soit essentiel (s'il ne l'est pas, le caractère de cette représentation est nul). Ainsi, on associe à $\boldsymbol{\tau}$ une représentation $\tilde{\pi}_{\boldsymbol{\tau}}$ de $\tilde{L}(F)$, resp. $\tilde{\Pi}_{\boldsymbol{\tau}}$ de $\tilde{G}(F)$.

**Lemme**. *La représentation $\tilde{\Pi}_{\boldsymbol{\tau}}$ est isomorphe à l'induite $Ind_{\tilde{Q}}^{\tilde{G}}(\tilde{\pi}_{\boldsymbol{\tau}})$.*

Preuve. Fixons $(A,\gamma)\in\mathcal{N}^{\tilde{G}}(\sigma)$ se projetant sur $\tilde{\boldsymbol{r}}$. On construit les représentations $\tilde{\Pi}_{\boldsymbol{\tau}}$ et $\tilde{\pi}_{\boldsymbol{\tau}}$ à l'aide de ces éléments comme en 2.8. Leurs représentations sous-jacentes de $G(F)$ sont respectivement $\Pi$ et $\pi$. Comme on l'a dit ci-dessus, $\Pi\simeq Ind_Q^G(\pi)$. L'action de $\gamma$ sur $Ind_{\tilde{Q}}^{\tilde{G}}(\tilde{\pi}_{\boldsymbol{\tau}})$ se déduit de $\tilde{\nabla}_P^{\tilde{L}}(A,\gamma)$ par la formule 2.5(3). Il suffit de vérifier que, par l'isomorphisme précédent, cette action coïncide avec $\tilde{\Pi}_{\boldsymbol{\tau}}(\gamma)=\tilde{\nabla}_P(A,\gamma)$. Comme pour (1), c'est un simple calcul reposant sur le fait que l'opérateur $R_{P|ad_\gamma(P)}(\sigma)$ se déduit par fonctorialité de $R^L_{P|ad_\gamma(P)}(\sigma)$. $\square$

## 2.11 Les ensembles $E_{disc}(\tilde{G},\omega)$ et $E_{ell}(\tilde{G},\omega)$

Soient $M$ un Levi semi-standard de $G$ et $\sigma$ une représentation irréductible et de la série discrète de $M(F)$. Un élément $\tilde{w}\in W^{\tilde{G}}(\sigma)$ agit naturellement sur $\mathcal{A}_M$. Notons $\mathcal{A}_M^{\tilde{w}}$ le sous-espace des points fixes par cette action. Il contient $\mathcal{A}_{\tilde{G}}$. On note $W_{reg}^{\tilde{G}}(\sigma)$ l'ensemble des $\tilde{w}\in W^{\tilde{G}}(\sigma)$ tels que $\mathcal{A}_M^{\tilde{w}}=\mathcal{A}_{\tilde{G}}$. Rappelons que $R^{\tilde{G}}(\sigma)=W_0^G(\sigma)\backslash W^{\tilde{G}}(\sigma)$, en particulier $R^{\tilde{G}}(\sigma)=W^{\tilde{G}}(\sigma)$ si $W_0^G(\sigma)=\{1\}$.

**Lemme**. *Soit $\tilde{r}\in R^{\tilde{G}}(\sigma)$. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

*(a) il n'existe pas d'espace de Levi $\tilde{L}$ tel que $M\subset L\subsetneq G$ et $\tilde{r}\in R^{\tilde{L}}(\sigma)$ ;*

*(b) $W_0^G(\sigma)=\{1\}$ et $\tilde{r}\in W_{reg}^{\tilde{G}}(\sigma)$.*

Preuve. Fixons $\tilde{w}\in W^{\tilde{G}}(\sigma)$ d'image $\tilde{r}$. Pour un espace de Levi $\tilde{L}$ tel que $M\subset L\subsetneq G$, l'image de $R^{\tilde{L}}(\sigma)$ dans $R^{\tilde{G}}(\sigma)$ est $W_0^G(\sigma)\backslash(W_0^G(\sigma)W^{\tilde{L}}(\sigma))$. La condition (a) équivaut donc à

(1) pour tout $w'\in W_0^G(\sigma)$, il n'existe pas de $\tilde{L}$ comme ci-dessus tel que $w'\tilde{w}\in W^{\tilde{L}}(\sigma)$.

D'après 2.1(4), la condition $w'\tilde{w}\in W^{\tilde{L}}(\sigma)$ équivaut à $\mathcal{A}_{\tilde{L}}\subset\mathcal{A}_M^{w'\tilde{w}}$. Donc (1) est équivalent à

(2) pour tout $w'\in W_0^G(\sigma)$, $w'\tilde{w}\in W_{reg}^{\tilde{G}}(\sigma)$.

Si $W_0^G(\sigma)=\{1\}$, (2) est équivalente à (b). Si $W_0^G(\sigma)\neq\{1\}$, (b) n'est pas vérifiée et on doit prouver que (2) ne l'est pas non plus. Comme on l'a dit en 1.11, $W_0^G(\sigma)$ est le groupe de Weyl d'un système de racines inclus dans l'ensemble des racines de $A_M$ dans $G$. Il résulte des définitions que l'action de $\tilde{w}$ conserve ce système de racines. Fixons une base de ce système. On peut alors trouver $w'\in W_0^G(\sigma)$ tel que $w'\tilde{w}$ conserve cette base (en permutant ses éléments). La somme des coracines associées aux éléments de cette base est alors un élément de $\mathcal{A}_M^{w'\tilde{w}}$ qui n'appartient pas à $\mathcal{A}_{\tilde{G}}$. Donc $w'\tilde{w}\notin W_{reg}^{\tilde{G}}(\sigma)$ et (2) n'est pas vérifiée. $\square$

Soit $\tilde{w}\in W^{\tilde{G}}(\sigma)$. Comme on vient de le dire, l'action de $\tilde{w}$ conserve l'ensemble de racines associé à $W_0^G(\sigma)$, cf.1.11. En fixant un sous-ensemble positif, on pose $\epsilon_\sigma(\tilde{w})=(-1)^{n(\tilde{w})}$, où $n(\tilde{w})$ est le nombre de racines positives $\alpha$ telles que $\tilde{w}(\alpha)$ soit négative. Ce signe ne dépend pas de l'ensemble positif choisi. Soit $\tau=(M,\sigma,\tilde{r})\in E(\tilde{G},\omega)$. On choisit $\tilde{w}\in\mathcal{W}^{\tilde{G}}(\sigma)$ se projetant sur $\tilde{r}$ et on pose

$$\iota(\tau)=|W_0^G(\sigma)|^{-1}\sum_{\tilde{w}'\in W_0^G(\sigma)\tilde{w}\cap W_{reg}^{\tilde{G}}(\sigma)}\epsilon_\sigma(\tilde{w}')|det((1-\tilde{w}')_{|\mathcal{A}_M^{\tilde{G}}})|^{-1}.$$

On dit que le triplet $\tau \in E(\tilde{G},\omega)$ est discret si $W_0^G(\sigma)\tilde{w} \cap W_{reg}^{\tilde{G}}(\sigma) \neq \emptyset$. On dit que $\tau$ est elliptique s'il est discret et de plus $W_0^G(\sigma) = \{1\}$. On note $E_{disc}(\tilde{G},\omega)$, resp. $E_{ell}(\tilde{G},\omega)$, l'ensemble des triplets $(M,\sigma,r)$ qui sont discrets, resp. elliptiques. On note $E_{disc}(\tilde{G},\omega)/conj$, resp. $E_{ell}(\tilde{G},\omega)/conj$, l'ensemble des classes de conjugaison par $G(F)$ dans $E_{disc}(\tilde{G},\omega)$, resp. $E_{ell}(\tilde{G},\omega)$.

## 2.12 Représentations elliptiques

Posons, avec les notations de 2.9,

$$D_{ell}(\tilde{G}(F);\omega) = \oplus_{\tau\in E_{ell}(\tilde{G},\omega)/conj} D_\tau.$$

Pour tout ensemble de Levi $\tilde{L} \in \mathcal{L}(\tilde{M}_0)$, posons $W^G(\tilde{L}) = Norm_{G(F)}(\tilde{L})/L(F)$. Supposons que $\omega$ soit trivial sur $Z_L(F)^\theta$. Le groupe $Norm_{G(F)}(\tilde{L})$ agit sur $D_{temp}(\tilde{L}(F);\omega)$ : à $n \in Norm_{G(F)}(\tilde{L})$ et $d \in D_{temp}(\tilde{L}(F);\omega)$, on associe la distribution $f \mapsto \omega(n)^{-1}d(f^n)$, où $f^n(\gamma) = f(n\gamma n^{-1})$. Cette action se descend en une action de $W^G(\tilde{L})$ sur $D_{temp}(\tilde{L}(F);\omega)$. Cette action conserve le sous-espace $D_{ell}(\tilde{L}(F);\omega)$. Selon l'usage, on note $D_{ell}(\tilde{L}(F);\omega)^{W^G(\tilde{L})}$ le sous-espace des invariants.

Définissons une action du groupe $Norm_{G(F)}(\tilde{L})$ sur l'ensemble $\mathcal{E}(\tilde{L})/conj$ des classes de conjugaison par $L(F)$ dans $\mathcal{E}(\tilde{L})$. Soient $n \in Norm_{G(F)}(\tilde{L})$ et $\boldsymbol{\tau} = (M,\sigma,\tilde{\boldsymbol{r}}) \in \mathcal{E}(\tilde{L})$. Posons $M' = nMn^{-1}$, $\sigma' = n\sigma$. Quitte à multiplier $n$ à gauche par un élément de $L(F)$, on peut supposer $M'$ semi-standard. On définit une bijection $ad_n : \mathcal{N}^{\tilde{L}}(\sigma) \simeq \mathcal{N}^{\tilde{L}}(\sigma')$ comme en 2.8 : à $(A,\gamma)$, on associe $(A\omega(n), n\gamma n^{-1})$. Cette bijection se descend en une bijection $ad_n : \mathcal{R}^{\tilde{G}}(\sigma) \to \mathcal{R}^{\tilde{G}}(\sigma')$. La classe de conjugaison par $L(F)$ du triplet $\boldsymbol{\tau}' = (M',\sigma',ad_n(\tilde{\boldsymbol{r}}))$ ne dépend pas de la modification de $n$ faite ci-dessus et ne dépend que de la classe de conjugaison par $L(F)$ de $\boldsymbol{\tau}$. L'action cherchée est celle qui associe à la classe de $\boldsymbol{\tau}$ celle de $\boldsymbol{\tau}'$. Cette action se quotiente en une action de $W^G(\tilde{L})$.

Notons $\mathcal{L}(\tilde{M}_0;\omega)$ l'ensemble des $\tilde{L} \in \mathcal{L}(\tilde{M}_0)$ tels que $\omega$ soit trivial sur $Z_L(F)^\theta$. Soit $\tilde{L} \in \mathcal{L}(\tilde{M}_0;\omega)$. Pour $\tilde{Q} \in \mathcal{P}(\tilde{M})$, l'opération d'induction $Ind_{\tilde{Q}}^{\tilde{G}}$ définit une application de $D_{temp}(\tilde{L}(F);\omega)$ dans $D_{temp}(\tilde{G}(F);\omega)$ qui ne dépend pas du choix de $\tilde{Q}$. On note

$$Ind_{\tilde{L}}^{\tilde{G}} : D_{temp}(\tilde{L}(F);\omega) \to D_{temp}(\tilde{G}(F);\omega)$$

cette application. Posons simplement $\tilde{W}^G = W^G(\tilde{M}_0)$. Ce groupe agit sur $\mathcal{L}(\tilde{M}_0)$ et conserve $\mathcal{L}(\tilde{M}_0,\omega)$.

**Proposition**. *(i) Pour tout $\tilde{L} \in \mathcal{L}(\tilde{M}_0,\omega)$, l'application $Ind_{\tilde{L}}^{\tilde{G}}$ est injective sur $D_{ell}(\tilde{L}(F);\omega)^{W^G(\tilde{L})}$.*
*(ii)On a l'égalité*

$$D_{temp}(\tilde{G}(F),\omega) = \oplus_{\tilde{L}\in\mathcal{L}(\tilde{M}_0,\omega)/\tilde{W}^G} Ind_{\tilde{L}}^{\tilde{G}}(D_{ell}(\tilde{L}(F);\omega)^{W^G(\tilde{L})}).$$

Preuve. D'après la proposition 2.9, l'espace $D_{temp}(\tilde{G}(F);\omega)$ a une base paramétrée par $E(\tilde{G},\omega)/conj$. On note ici $(e^{\tilde{G}}(\tau))_{\tau\in E(\tilde{G},\omega)/conj}$ une telle base. Alors $(e^{\tilde{G}}(\tau))_{\tau\in E_{ell}(\tilde{G},\omega)/conj}$ est une base de $D_{ell}(\tilde{G}(F);\omega)$. Soit $\tilde{L} \in \mathcal{L}(\tilde{M}_0,\omega)$. Le groupe $W^G(\tilde{L})$ agit tant sur $D_{ell}(\tilde{L}(F);\omega)$ que sur $E_{ell}(\tilde{L})/conj$. Pour $w \in W^G(\tilde{L})$ et $\tau \in E_{ell}(\tilde{L})/conj$, on a une égalité $w(e^{\tilde{L}}(\tau))=z(w,\tau)e^{\tilde{L}}(w\tau)$, avec $z(w,\tau)\in\mathbb{C}^{\times}$. Posons $\underline{e}^{\tilde{L}}(\tau)=\sum_{w\in W^G(\tilde{L})}w(e^{\tilde{L}}(\tau))$. Cet élément peut être nul : la restriction de l'application $w\mapsto z(w,\tau)$ au stabilisateur de $\tau$ est un caractère de ce groupe ; $\underline{e}^{\tilde{L}}(\tau)$ est nul si et seulement si ce caractère est non trivial. Notons $\underline{E}_{ell}(\tilde{L})$ l'ensemble des $\tau\in E_{ell}(\tilde{L})$ dont la classe vérifie $\underline{e}^{\tilde{L}}(\tau)\neq 0$. L'action de $W^G(\tilde{L})$ respecte cet ensemble. Identifions l'ensemble quotient $(\underline{E}_{ell}(\tilde{L})/conj)/W^G(\tilde{L})$ à un ensemble de représentants (on fera d'autres identifications similaires dans la suite). Alors $(\underline{e}^{\tilde{L}}(\tau))_{\tau\in(\underline{E}_{ell}(\tilde{L})/conj)/W^G(\tilde{L})}$ est une base de $D_{ell}(\tilde{L}(F);\omega)^{W^G(\tilde{L})}$.

Pour ce qui est des triplets $(M,\sigma,\tilde{r})$, il y a une correspondance naturelle entre triplets pour $\tilde{L}$ et triplets pour $\tilde{G}$ : c'est l'identité, modulo l'identification de $\mathcal{R}^{\tilde{L}}(\sigma)$ à un sous-ensemble de $\mathcal{R}^{\tilde{G}}(\sigma)$. On a déjà dit qu'un triplet pouvait être essentiel pour $\tilde{L}$ mais pas pour $\tilde{G}$. Notons $E^{\tilde{G}}(\tilde{L})$ l'ensemble des triplets pour $\tilde{L}$ qui sont essentiels dans $\tilde{G}$. De la correspondance précédente se déduit une application $\iota_{\tilde{L}}^{\tilde{G}}:E^{\tilde{G}}(\tilde{L})/conj\to E(\tilde{G},\omega)/conj$. Celle-ci est invariante par l'action de $W^G(\tilde{L})$ sur l'espace de départ. D'après le lemme 2.10, l'application $Ind_{\tilde{L}}^{\tilde{G}}$ se décrit ainsi : pour $\tau\in E(\tilde{L},\omega)/conj$, elle envoie $e^{\tilde{L}}(\tau)$ sur 0 si $\tau\notin E^{\tilde{G}}(\tilde{L})/conj$ et sur $z_{\tilde{L}}^{\tilde{G}}(\tau)e^{\tilde{G}}(\iota_{\tilde{L}}^{\tilde{G}}(\tau))$ si $\tau\in E^{\tilde{G}}(\tilde{L})/conj$, où $z_{\tilde{L}}^{\tilde{G}}(\tau)\in\mathbb{C}^{\times}$. Soit $\tau\in E_{ell}^{\tilde{G}}(\tilde{L})/conj$ $(=(E^{\tilde{G}}(\tilde{L})/conj)\cap(E_{ell}(\tilde{L})/conj))$. Puisque l'induction est insensible à l'action de $W^G(\tilde{L})$, $Ind_{\tilde{L}}^{\tilde{G}}$ envoie $\underline{e}^{\tilde{L}}(\tau)$ sur $|W^G(\tilde{L})|z_{\tilde{L}}^{\tilde{G}}(\tau)e^{\tilde{G}}(\iota_{\tilde{L}}^{\tilde{G}}(\tau))$. A fortiori $\underline{e}^{\tilde{L}}(\tau)\neq 0$, ce qui démontre l'inclusion $E_{ell}^{\tilde{G}}(\tilde{L})\subset\underline{E}_{ell}(\tilde{L})$.

On a décrit des bases de chacun de nos espaces et les matrices des applications d'induction dans ces bases. Le lemme résulte alors des deux assertions suivantes :

(1) pour tout $\tilde{L}\in\mathcal{L}(\tilde{M}_0,\omega)$, on a l'égalité $E_{ell}^{\tilde{G}}(\tilde{L})=\underline{E}_{ell}(\tilde{L})$ ;

(2) notons

$$\iota:\bigsqcup_{\tilde{L}\in\mathcal{L}(\tilde{M}_0,\omega)/\tilde{W}^G}(E_{ell}^{\tilde{G}}(\tilde{L})/conj)/W^G(\tilde{L})\to E(\tilde{G},\omega)/conj$$

l'application qui coïncide avec $\iota_{\tilde{L}}^{\tilde{G}}$ sur le sous-ensemble indexé par $\tilde{L}$ de l'ensemble de départ ; alors $\iota$ est bijective.

Prouvons (2). Soit $\tau=(M,\sigma,\tilde{r})\in E(\tilde{G},\omega)$. Parmi les espaces de Levi $\tilde{L}$ tels que $M\subset L$ et $\tilde{r}\in\mathcal{R}^{\tilde{L}}(\sigma)$, considérons un élément minimal $\tilde{L}$. Quitte à conjuguer $\tau$ par un élément de $G(F)$, on peut supposer $\tilde{L}\in\mathcal{L}(\tilde{M}_0,\omega)$. Notons $\tau^{\tilde{L}}$ le même triplet vu comme un élément de $E(\tilde{L},\omega)$. On a $\tau=\iota_{\tilde{L}}^{\tilde{G}}(\tau^{\tilde{L}})$. Le lemme 2.11 et la minimalité de $\tilde{L}$ assurent que $\tau^{\tilde{L}}\in E_{ell}(\tilde{L})$ (et forcément $\tau^{\tilde{L}}\in E_{ell}^{\tilde{G}}(\tilde{L})$). Cela prouve la surjectivité de $\iota$. Démontrons l'injectivité. On identifie $\mathcal{L}(\tilde{M}_0,\omega)/\tilde{W}^G$ à un ensemble de représentants dans $\mathcal{L}(\tilde{M}_0,\omega)$. Soient $\tilde{L},\tilde{L}'$ dans cet ensemble, $\tau=(M,\sigma,\tilde{r})\in E_{ell}^{\tilde{G}}(\tilde{L})$, $\tau'=(M',\sigma',\tilde{r}')\in E_{ell}^{\tilde{G}}(\tilde{L}')$, supposons les triplets $(M,\sigma,\tilde{r})$ et $(M',\sigma',\tilde{r}')$ conjugués par un élément de $G(F)$. On doit prouver qu'alors $\tilde{L}=\tilde{L}'$ et que $\tau$ et $\tau'$ sont conjugués par l'action du normalisateur $Norm_{G(F)}(\tilde{L})$. Soit $g\in G(F)$ qui conjugue le premier triplet en le second. On a $gMg^{-1}=M'$, $g\sigma=\sigma'$. Notons que, puisque $\tau$ est elliptique, $\tilde{r}$ est au départ un élément de $W_{reg}^{\tilde{L}}(\sigma)$. Mais, après passage à $\tilde{G}$, le triplet n'est plus elliptique et $\tilde{r}$ devient une classe modulo $W_0^G(\sigma)$. De même pour $\tilde{r}'$. En continuant à considérer $\tilde{r}$ et $\tilde{r}'$ comme des éléments de $W_{reg}^{\tilde{L}}(\sigma)$ et $W_{reg}^{\tilde{L}'}(\sigma')$, la condition de conjugaison est $ad_g(W_0^G(\sigma)\tilde{r})=W_0^G(\sigma')\tilde{r}'$. On a dit que $W_0^G(\sigma)$ est le groupe de Weyl d'un sous-système de racines $\Sigma$ de l'ensemble des racines de $A_M$ dans $G$. Puisque $W_0^L(\sigma)=\{1\}$ (condition d'ellipticité), aucune de ces racines n'intervient dans $L$. On peut donc trouver un élément $H\in\mathcal{A}_{\tilde{L}}$ qui n'annule aucune de ces racines. Fixons un tel élément. Il détermine un sous-ensemble positif $\Sigma_+\subset\Sigma$ :

l'ensemble des $\alpha \in \Sigma$ tels que $< \alpha, H >> 0$. Puisque $\tilde{r} \in W^{\tilde{L}}$ fixe $H$, l'action de $\tilde{r}$ conserve $\Sigma_+$. On a des objets analogues pour $\tau'$, que l'on affecte d'un $'$. La conjugaison par $g$ envoie $\Sigma$ sur $\Sigma'$. Quitte à multiplier $g$ à gauche par un élément de $W_0^G(\sigma')$, on peut supposer qu'elle envoie $\Sigma_+$ sur $\Sigma'_+$. Ecrivons $ad_g(\tilde{r}) = w\tilde{r}'$, avec $w \in W_0^G(\sigma)$. Puisque $\tilde{r}$ conserve $\Sigma_+$, $ad_g(\tilde{r})$ conserve $\Sigma'_+$. Il en est de même de $\tilde{r}'$. Donc aussi de $w$. Un élément du groupe de Weyl qui conserve un ensemble positif est l'identité. D'où $w = 1$. Puisque $\tilde{r} \in W^{\tilde{L}}(\sigma)$, $\tilde{L}$ est le plus petit espace de Levi contenant à la fois $M$ et $\tilde{r}$. De même pour $\tilde{L}'$. Alors $g$ conjugue $\tilde{L}$ en $\tilde{L}'$. Deux éléments de $\mathcal{L}(\tilde{M}_0)$ qui sont conjugués par un élément de $G(F)$ le sont par un élément de $\tilde{W}^G$. Puisque les deux espaces de Levi $\tilde{L}$ et $\tilde{L}'$ appartiennent à notre ensemble de représentants, on a $\tilde{L} = \tilde{L}'$ et $g$ appartient à $Norm_{G(F)}(\tilde{L})$. C'est ce que l'on voulait prouver.

Prouvons (1). Soient $\tilde{L} \in \mathcal{L}(\tilde{M}_0, \omega)$ et $\tau \in E_{ell}(\tilde{L}) - E_{ell}^{\tilde{G}}(\tilde{L})$. On veut prouver que $\tau \notin \underline{E}_{ell}(\tilde{L})$, autrement dit que la fonction $w \mapsto z(w, \tau)$ n'est pas constante sur le stabilisateur $Stab(W^G(\tilde{L}), \tau)$ de $\tau$ dans $W^G(\tilde{L})$ (en notant encore $\tau$ la classe de conjugaison de $\tau$ par $L(F)$). Relevons $\tau$ en un élément $\boldsymbol{\tau} = (M, \sigma, \tilde{\boldsymbol{r}}) \in \mathcal{E}(\tilde{L})$. Il résulte des définitions que, pour $w \in Stab(W^G(\tilde{L}), \tau)$, $w(\boldsymbol{\tau})$ est égal à $(M, \sigma, z(w, \tau)\tilde{\boldsymbol{r}})$, à conjugaison près par un élément de $L(F)$. Il s'agit donc de trouver un élément $g \in Norm_{G(F)}(\tilde{L})$ tel que $ad_g(\boldsymbol{\tau}) = (M, \sigma, z\tilde{\boldsymbol{r}})$, avec $z \neq 1$. Puisque $\tau \notin E_{ell}^{\tilde{G}}(\tilde{L})$, il existe en tout cas un élément $g \in G(F)$ qui vérifie cette dernière relation. La preuve de l'injectivité de $\iota$ montre que, quitte à modifier $g$ par un élément de $W_0^G(\sigma)$ (ce qui ne change par $ad_g(\boldsymbol{\tau})$), on peut supposer $g \in Norm_{G(F)}(\tilde{L})$. C'est ce qu'on voulait. $\square$

# 3 Le calcul spectral

## 3.1 Position du problème

On considère un élément $T \in \mathcal{A}_0$, qui intervient dans ce qui suit comme un paramètre. On lui impose de vérifier les propriétés suivantes :

$\theta(T) = T$ ;

$< \alpha, T >> 0$ pour tout $\alpha \in \Delta_0$ ;

$< \alpha, T >\geq c_\star |T|$, où $c_\star > 0$ est un réel fixé ;

si $F$ est non-archimédien, $T \in \mathcal{A}_{M_0,F} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$.

On note $\tilde{\kappa}^T$ la fonction caractéristique du sous-ensemble des $g \in G(F)$ tels que $\phi^{\tilde{G}}(h_0(g) - T) = 1$. Ce sous-ensemble est invariant par $A_G(F)$ et sa projection dans $A_G(F)\backslash G(F)$ est compact.

On définit le sous-espace $C_c^\infty(\tilde{G}(F); K)$ de $C_c^\infty(\tilde{G}(F))$ comme en 2.7. Soient $f_1, f_2 \in C_c^\infty(\tilde{G}(F), K)$. On pose

$$J^T(\omega, f_1, f_2) = \int_{A_{\tilde{G}}(F)\backslash G(F)} \int_{\tilde{G}(F)} \bar{f}_1(\gamma) f_2(g^{-1}\gamma g)\omega(g)\tilde{\kappa}^T(g)\, d\gamma\, dg.$$

C'est une intégrale à support compact. En effet, l'intégration en $\gamma$ est à support compact puisque $f_1$ l'est. A cause de la fonction $\tilde{\kappa}^T$, on peut écrire $g = ay$, où $y$ reste dans un compact et $a \in A_G(F)$. La condition $f_2(g^{-1}\gamma g) \neq 0$ impose alors que $a^{-1}\theta(a)$ reste dans un compact ce qui entraîne que l'image de $a$ dans $A_{\tilde{G}}(F)\backslash A_G(F)$ reste dans un compact.

On se propose dans cette section de montrer que la fonction $T\mapsto J^T(\omega,f_1,f_2)$ est asymptote à un élément de $PolExp$ et de calculer une expression "spectrale" du terme constant de cet élément.

## 3.2 Utilisation de la formule de Plancherel

On fixe un élément $\gamma_0\in\tilde{M}_0(F)$, vérifiant la condition 2.1(6) quand $F$ est archimédien. On note simplement $\theta=ad_{\gamma_0}$.

On définit les fonctions $\varphi_1$ et $\varphi_2$ sur $G(F)$ par $\varphi_i(x)=f_i(x\gamma_0)$ pour $i=1,2$. Alors

$$J^T(\omega,f_1,f_2)=\int_{A_{\tilde{G}}(F)\backslash G(F)}\int_{G(F)}\bar{\varphi}_1(x)\varphi_2(g^{-1}x\theta(g))\omega(g)\tilde{\kappa}^T(g)\,dx\,dg.$$

On utilise la formule de Plancherel-Harish-Chandra pour exprimer $\varphi_2$. C'est-à-dire

$$\varphi_2(g)=\sum_{M_{disc}\in\mathcal{L}(M_0)}|W^{M_{disc}}||W^G|^{-1}\sum_{\sigma\in\Pi_{disc}(M_{disc}(F))/i\mathcal{A}^*_{M_{disc},F}}|Stab(i\mathcal{A}^*_{M_{disc},F},\sigma)|^{-1}$$

$$\int_{i\mathcal{A}^*_{M_{disc},F}}m^G(\sigma_\lambda)trace(Ind_S^G(\sigma_\lambda,g^{-1})Ind_S^G(\sigma_\lambda,\varphi_2))\,d\lambda.$$

Pour tous $M$, $\sigma$, l'expression

$$\int_{A_{\tilde{G}}(F)\backslash G(F)}\int_{G(F)}|\varphi_1(x)|$$

$$|\int_{i\mathcal{A}^*_{M_{disc},F}}m^G(\sigma_\lambda)trace(Ind_S^G(\sigma_\lambda,\theta(^{-1}x^{-1}g)Ind_S^G(\sigma_\lambda,\varphi_2))\,d\lambda|\tilde{\kappa}^T(g)\,dx\,dg$$

est convergente. En effet, l'intégrale en $x$ est à support compact puisque $\varphi_1$ l'est. L'intégrale intérieure définit une fonction de Schwartz-Harish-Chandra en $\theta(g)^{-1}x^{-1}g$. Comme dans le paragraphe précédent, on peut écrire $g=ay$ où $y$ reste dans un compact. L'intégrale restante en $a$ est celle d'une fonction essentiellement bornée par $(1+|\theta(H_0(a))-H_0(a)|)^{-r}$ pour tout réel $r$. Une telle intégrale est convergente. On pose

$$J^T_{M_{disc},\sigma}(\omega,f_1,f_2)=\int_{A_{\tilde{G}}(F)\backslash G(F)}\int_{G(F)}\bar{\varphi}_1(x)$$

$$\int_{i\mathcal{A}^*_{M_{disc},F}}m^G(\sigma_\lambda)trace(Ind_S^G(\sigma_\lambda,\theta(g)^{-1}x^{-1}g)Ind_S^G(\sigma_\lambda,\varphi_2))\,d\lambda\omega(g)\tilde{\kappa}^T(g)\,dx\,dg$$

et on a

$$(1)\qquad J^T(\omega,f_1,f_2)=\sum_{M_{disc}\in\mathcal{L}(M_0)}|W^{M_{disc}}||W^G|^{-1}$$

$$\sum_{\sigma\in\Pi_{disc}(M_{disc}(F))/i\mathcal{A}^*_{M_{disc},F}}|Stab(i\mathcal{A}^*_{M_{disc},F},\sigma)|^{-1}J^T_{M_{disc},\sigma}(\omega,f_1,f_2).$$

## 3.3 Apparition d'intégrales de coefficients

Nous fixons maintenant un Levi semi-standard $M_{disc}$ et $\sigma \in \Pi_{disc}(M_{disc}(F))$. On fixe aussi $S \in \mathcal{P}(M_{disc})$. On pose $\pi_\lambda = Ind_S^G(\sigma_\lambda)$ que l'on réalise dans l'espace $V_{\sigma,S}$. On pose $S' = \theta^{-1}(S)$, $\sigma' = \sigma \circ \theta$, $\lambda' = \theta^{-1}\lambda$, $\pi'_{\lambda'} = Ind_{S'}^G(\sigma'_{\lambda'})$, que l'on réalise dans l'espace $V_{\sigma',S'}$. On fixe des bases orthonormées $\mathcal{B}$ de $V_{\sigma,S}$ et $\mathcal{B}'$ de $V_{\sigma',S'}$, réunions de bases des différents $K$-types intervenant. On introduit l'opérateur $V_{\pi'_{\lambda'}} \to V_{\pi_\lambda}$ qui à $e \in V_{\pi'_{\lambda'}}$ associe la fonction $g \mapsto e(\theta^{-1}(g))$. Par restriction à $K$, on obtient un opérateur unitaire $U_{\theta,\sigma_\lambda} : V_{\sigma',S'} \to V_{\sigma,S}$, qui vérifie $U_{\theta,\sigma_\lambda}\pi'_{\lambda'}(g) = \pi_\lambda(\theta(g))U_{\theta,\sigma_\lambda}$. Si $K$ est stable par $\theta$, il est indépendant de $\lambda$. Mais on n'a pas posé cette hypothèse sur $K$ et l'opérateur peut dépendre de $\lambda$.

Pour $x, g \in G(F)$, on a

$$trace(Ind_S^G(\sigma_\lambda, \theta(g)^{-1}x^{-1}g)Ind_S^G(\sigma_\lambda, \varphi_2)) = trace(U_{\theta,\sigma_\lambda}^{-1} Ind_S^G(\sigma_\lambda, \theta(g)^{-1}x^{-1}g)Ind_S^G(\sigma_\lambda, \varphi_2)U_{\theta,\sigma_\lambda})$$

$$= \sum_{v' \in \mathcal{B}'} (v', U_{\theta,\sigma_\lambda}^{-1}\pi_\lambda(\theta(g)^{-1}x^{-1}g)\pi_\lambda(\varphi_2)U_{\theta,\sigma_\lambda}v')$$

$$= \sum_{v' \in \mathcal{B}'} (\pi_\lambda(x\theta(g))U_{\theta,\sigma_\lambda}v', \pi_\lambda(g)\pi_\lambda(\varphi_2)U_{\theta,\sigma_\lambda}v').$$

Cette somme est finie : $\varphi_2$ est $K$-finie à droite donc $\pi_\lambda(\varphi_2)U_{\theta,\sigma_\lambda}$ annule presque tout $v' \in \mathcal{B}'$. L'expression

$$\int_{G(F)} \bar{\varphi}_1(x) \int_{i\mathcal{A}^*_{M_{disc},F}} m^G(\sigma_\lambda) \sum_{v' \in \mathcal{B}'} (\pi_\lambda(x\theta(g))U_{\theta,\sigma_\lambda}v', \pi_\lambda(g)\pi_\lambda(\varphi_2)U_{\theta,\sigma_\lambda}v')\, d\lambda\, dx$$

est absolument convergente. En permutant les intégrales, on voit qu'elle vaut

$$\int_{i\mathcal{A}^*_{M_{disc},F}} m^G(\sigma_\lambda) \sum_{v' \in \mathcal{B}'} (\pi_\lambda(\varphi_1)\pi_\lambda(\theta(g))U_{\theta,\sigma_\lambda}v', \pi_\lambda(g)\pi_\lambda(\varphi_2)U_{\theta,\sigma_\lambda}v')\, d\lambda.$$

On a l'égalité

$$(\pi_\lambda(\varphi_1)\pi_\lambda(\theta(g))U_{\theta,\sigma_\lambda}v', \pi_\lambda(g)\pi_\lambda(\varphi_2)U_{\theta,\sigma_\lambda}v') = (\pi_\lambda(\varphi_1)U_{\theta,\sigma_\lambda}\pi'_{\lambda'}(g)v', \pi_\lambda(g)\pi_\lambda(\varphi_2)U_{\theta,\sigma_\lambda}v').$$

On exprime matriciellement tous les opérateurs intervenant. L'expression ci-dessus devient

$$\sum_{u,v \in \mathcal{B}, u' \in \mathcal{B}'} (\pi_\lambda(\varphi_1)U_{\theta,\sigma_\lambda}u', v)(u, \pi_\lambda(\varphi_2)U_{\theta,\sigma_\lambda}v')(v, \pi_\lambda(g)u)(\pi'_{\lambda'}(g)v', u').$$

Cette somme est en fait finie d'après les propriétés de $K$-finitude des fonctions $\varphi_1$ et $\varphi_2$ et de l'opérateur $U_{\theta,\sigma_\lambda}$. Posons

$$B_{u,v,u',v'}(\lambda) = (\pi_\lambda(\varphi_1)U_{\theta,\sigma_\lambda}u', v)(u, \pi_\lambda(\varphi_2)U_{\theta,\sigma_\lambda}v').$$

C'est une fonction de Schwartz sur $i\mathcal{A}^*_{M_{disc},F}$. On obtient l'égalité

$$(1) \qquad J^T_{M_{disc},\sigma}(\omega, f_1, f_2) = \sum_{u,v \in \mathcal{B}, u',v' \in \mathcal{B}'} \int_{A_{\tilde{G}}(F)\backslash G(F)}$$

$$\int_{i\mathcal{A}^*_{M_{disc},F}} m^G(\sigma_\lambda)B_{u,v,u',v'}(\lambda)(v, \pi_\lambda(g)u)(\pi'_{\lambda'}(g)v', u')\, d\lambda\, dx\, \omega(g)\tilde{\kappa}^T(g)\, dg.$$

### 3.4 Une première approximation d'une intégrale de coefficients

Fixons $u, v \in \mathcal{B}$, $u', v' \in \mathcal{B}'$ et une fonction de Schwartz $B$ sur $i\mathcal{A}^*_{M_{disc},F}$. On pose

$$j^T = \int_{A_{\tilde{G}}(F)\backslash G(F)} \int_{i\mathcal{A}^*_{M_{disc},F}} m^G(\sigma_\lambda)B(\lambda)(v, \pi_\lambda(g)u)(\pi'_{\lambda'}(g)v', u')\, d\lambda\, \omega(g)\tilde{\kappa}^T(g)\, dg,$$

où on rappelle que $\lambda' = \theta^{-1}\lambda$. Cette expression est convergente dans l'ordre indiqué pour les mêmes raisons que précédemment. La formule (1) du paragraphe précédent exprime $J^T_{M_{disc},\sigma}(\omega, f_1, f_2)$ comme combinaison linéaire de telles expressions $j^T$.

On définit une fonction $\Omega_G$ sur $M_0(F)$ par

$$\Omega_G(m) = \int_{K\times K} \int_{i\mathcal{A}^*_{M_{disc},F}} m^G(\sigma_\lambda)B(\lambda)(v, \pi_\lambda(kmk')u)(\pi'_{\lambda'}(kmk')v', u')\, d\lambda\, \omega(kmk')\, dk\, dk'.$$

Alors

$$j^T = \int_{A_{\tilde{G}}(F)\backslash M_0(F)^{\geq}} \Omega_G(m)D_0(m)\tilde{\kappa}^T(m)\, dm.$$

Soit $Q = LU_Q$ un sous-groupe parablique standard de $G$. Comme en 1.12, notons $W^G(L|S)$ l'ensemble des $w \in W^G/W^{M_{disc}}$ tels que $w(M_{disc}) \subset L$, $w(S) \cap L \supset P_0 \cap L$. On identifiera souvent cet ensemble à un sous-ensemble de $W^G$ formé d'éléments $w$ de longueur minimale dans leur classe $W^L w$. Pour un élément $w$ de cet ensemble, on note $Q_w = (w(S)\cap L)U_Q$, $\underline{Q}_w = (w(S)\cap L)U_{\bar{Q}}$. Notons $\pi_w = Ind^G_{Q_w}(w\sigma)$ et $\underline{\pi}_w = Ind^G_{\underline{Q}_w}(w\sigma)$, réalisées dans leurs espaces habituels $V_{w\sigma,Q_w}$ et $V_{w\sigma,\underline{Q}_w}$. Pour $v \in V_{w\sigma,Q_w}$ et $\underline{v} \in V_{w\sigma,\underline{Q}_w}$, on pose

$$(v, \underline{v})^L = \int_{K\cap L(F)} (v(k), \underline{v}(k))\, dk.$$

Le produit intérieur est le produit hermitien sur $V_{w\sigma}$. On pose des définitions analogues en remplaçant $S$ par $S' = \theta^{-1}(S)$. On prendra garde que les définitions de $Q_w$ et $\underline{Q}_w$ changent : pour $w \in W^G(L|S')$, on a $Q_w = (w(S')\cap L)U_Q$.

Soient $w \in W^G(L|S)$ et $w' \in W^G(L|S')$. On définit une fonction $\omega_{Q,w,w'}$ sur $G(F) \times K \times K \times \mathcal{A}^*_{M_{disc},\mathbb{C}}$ par

$$\omega_{Q,w,w'}(g, k, k', \lambda) = (J_{Q_w|w(S)}((w\sigma)_{w\lambda})\circ\gamma(w)\circ\pi_\lambda(k)v, J_{\underline{Q}_w|w(S)}((w\sigma)_{w\lambda})\circ\gamma(w)\circ\pi_\lambda(gk')u)^L$$

$$(J_{\underline{Q}_{w'}|w'(S')}((w'\sigma')_{w'\lambda'}) \circ \gamma(w') \circ \pi'_{\lambda'}(gk')v', J_{Q_{w'}|w'(S')}((w'\sigma')_{w'\lambda'}) \circ \gamma(w') \circ \pi'_{\lambda'}(k)u')^L.$$

Cette fonction est méromorphe en $\lambda$. Pour comprendre les questions de régularité et de croissance en $\lambda$, il est commode de récrire cette définition en utilisant les opérateurs normalisés et les facteurs de normalisation. Pour $\lambda \in i\mathcal{A}^*_{M_{disc},F}$, on a l'égalité

$$(1) \qquad \omega_{Q,w,w'}(g, k, k', \lambda) = \mathbf{r}_{w,w'}(\sigma_\lambda)$$

$$(R_{Q_w|w(S)}((w\sigma)_{w\lambda}) \circ \gamma(w) \circ \pi_\lambda(k)v, R_{\underline{Q}_w|w(S)}((w\sigma)_{w\lambda}) \circ \gamma(w) \circ \pi_\lambda(gk')u, )^L$$

$$(R_{\underline{Q}_{w'}|w'(S')}((w'\sigma')_{w'\lambda'}) \circ \gamma(w') \circ \pi'_{\lambda'}(gk')v', R_{Q_{w'}|w'(S')}((w'\sigma')_{w'\lambda'}) \circ \gamma(w') \circ \pi'_{\lambda'}(k)u')^L,$$

où

$$\mathbf{r}_{w,w'}(\sigma_\lambda) = r_{\underline{Q}_w|Q_w}((w\sigma)_{w\lambda})r_{Q_{w'}|\underline{Q}_{w'}}((w'\sigma')_{w'\lambda'}).$$

Les opérateurs normalisés sont holomorphes et unitaires sur $i\mathcal{A}^*_{M_{disc},F}$. Les produits scalaires de l'expression ci-dessus sont donc holomorphes et bornés en $\lambda$. On a

(2) le produit $m^G(\sigma_\lambda)\mathbf{r}_{w,w'}(\sigma_\lambda)$ est holomorphe et à croissance modérée sur $i\mathcal{A}^*_{M_{disc},F}$.

En effet, par transport de structure, on a aussi

$$\mathbf{r}_{w,w'}(\sigma_\lambda) = r_{S_1|S_2}(\sigma_\lambda)r_{S_3|S_4}(\sigma_\lambda),$$

où $S_1 = w^{-1}(\underline{Q}_w)$, $S_2 = w^{-1}(Q_w)$, $S_3 = \theta((w')^{-1}(Q_{w'}))$, $S_4 = \theta((w')^{-1}(\underline{Q}_{w'}))$. Ces quatre paraboliques appartiennent à $\mathcal{P}(M_{disc})$ et il reste à appliquer 1.10(7).

On pose

$$\omega_{Q,w,w'}(g) = \int_{K\times K}\int_{i\mathcal{A}^*_{M_{disc},F}} \omega_{Q,w,w'}(g,k,k',\lambda)m^G(\sigma_\lambda)B(\lambda)\omega(k^{-1}gk')\,d\lambda\,dk\,dk'.$$

Pour tout sous-groupe parabolique standard $Q' = L'U_{Q'} \supset Q$, on note $\mathcal{W}_Q^{Q'}$ l'ensemble des $(w,w') \in W^G(L|S)\times W^G(L|S')$ tels que $\theta(W^{L'}w')\cap W^{L'}w \neq \emptyset$. On pose simplement $\mathcal{W}_Q = \mathcal{W}_Q^Q$.

Soit $R$ un parabolique standard contenant $Q$. Pour $w \in W^G(L|S)$ et $w' \in W^G(L|S')$, notons $s_Q^R(w,w')$ la somme des $(-1)^{a_{\tilde{P}}-a_{\tilde{G}}}$ sur les ensembles paraboliques $\tilde{P}$ tels que $Q \subset P \subset R$ et $(w,w') \in \mathcal{W}_Q^P$. Remarquons que, si cet ensemble d'ensembles paraboliques n'est pas vide, il existe $\tilde{P}_- \subset \tilde{P}_+$ de sorte que cet ensemble soit simplement celui des $\tilde{P}$ tels que $\tilde{P}_- \subset \tilde{P} \subset \tilde{P}_+$. Donc $s_Q^R(w,w')$ est nul si l'ensemble est vide ou si $\tilde{P}_- \neq \tilde{P}_+$ et est égal à $(-1)^{a_{\tilde{P}_+}-a_{\tilde{G}}}$ si l'ensemble est non vide et $\tilde{P}_- = \tilde{P}_+$. Posons

$$j_\star^T = \sum_{Q=LU_Q,R;P_0\subset Q\subset R}\ \sum_{w\in W^G(L|S),w'\in W^G(L|S')} s_Q^R(w,w')$$

$$\int_{A_{\tilde{G}}(F)\backslash M_0(F)^{\geq,Q}} \delta_Q(m)D_0^L(m)\tilde{\sigma}_Q^R(H_0(m)-T)\phi^Q(H_0(m)-T)\omega_{Q,w,w'}(m)\,dm.$$

**Proposition**. *L'expression ci-dessus est absolument convergente. Pour tout réel $r$, on a la majoration*

$$|j^T - j_\star^T| << |T|^{-r}$$

*pour tout $T$.*

La preuve de cette proposition sera donnée en 3.15.

## 3.5 Un lemme de majoration

Soit $Q = LU_Q$ un parabolique standard. Pour $H \in \mathcal{A}_0$, on note $\mathcal{C}^L(H)$ l'enveloppe convexe des $sH$ pour $s \in W^L$. On pose

$$N^L(H) = 1 + inf\{|\theta H' - H''|; H', H'' \in \mathcal{C}^L(H)\}.$$

Soient $w \in W^G(L|S)$ et $w' \in W^G(L|S')$, que l'on relève en des éléments de $W^G$. On pose

$$N^L_{w,w'}(H) = 1 + inf\{|w\circ\theta\circ(w')^{-1}H' - H''|; H', H'' \in \mathcal{C}^L(H)\}.$$

Ce terme ne dépend pas des relèvements choisis : changer de relèvement multiplie $w$ et $w'$ à gauche par des éléments de $W^L$ dont l'action conserve $\mathcal{C}^L(H)$. Remarquons que, dans le cas où $W^Lw\cap\theta(W^Lw')\neq\emptyset$, on peut pour la même raison remplacer $w'$ et $w$ par des éléments tels que $w=\theta(w')$ et on obtient $N^L_{w,w'}(H)=N^L(H)$.

**Lemme**. *Soit $Q=LU_Q$ un sous-groupe parabolique standard.*

*(i) Soient $w\in W^G(L|S)$ et $w'\in W^G(L|S')$ et soit $\tilde{P}=\tilde{M}U_P$ le plus petit espace parabolique standard tel que $Q\subset P$ et $(w,w')\in\mathcal{W}^P_Q$. Alors on a une majoration*

$$|(H-T)^M_L|<<N^L_{w,w'}(H)$$

*pour tout $T$ et tout $H\in\mathcal{A}_0$ tel que $\phi^Q(H-T)\tau^P_Q(H-T)=1$ et $<\alpha,H>\geq 0$ pour tout $\alpha\in\Delta^Q_0$.*

*(ii) Soit $\tilde{P}=\tilde{M}U_P$ le plus petit espace parabolique standard tel que $Q\subset P$. Alors on a une majoration*

$$|(H-T)^M_L|<<N^L(H)$$

*pour tout $T$ et tout $H\in\mathcal{A}_0$ tel que $\phi^Q(H-T)\tau^P_Q(H-T)=1$ et $<\alpha,H>\geq 0$ pour tout $\alpha\in\Delta^Q_0$.*

*(iii) Soient $w\in W^G(L|S)$ et $w'\in W^G(L|S')$ et soit $\tilde{P}=\tilde{M}U_P$ le plus petit espace parabolique standard tel que $Q\subset P$ et $(w,w')\in\mathcal{W}^P_Q$. Supposons $(w,w')\notin\mathcal{W}_Q$. Alors on a une majoration*

$$|T|+|(H-T)^M_L|<<N^L_{w,w'}(H)$$

*pour tout $T$ et tout $H\in\mathcal{A}_0$ tel que $\phi^Q(H-T)\tau^P_Q(H-T)=1$ et $<\alpha,H>\geq 0$ pour tout $\alpha\in\Delta^Q_0$.*

*(iv) Soient $w\in W^G(L|S)$ et $w'\in W^G(L|S')$ et soit $R$ un sous-groupe parabolique contenant $Q$. Supposons $s^R_Q(w,w')\neq 0$. Alors on a une majoration*

$$|(H-T)^{\tilde{G}}_L|<<N^L_{w,w'}(H)$$

*pour tout $T$ et tout $H\in\mathcal{A}_0$ tel que $\phi^Q(H-T)\tilde{\sigma}^R_Q(H-T)=1$ et $<\alpha,H>\geq 0$ pour tout $\alpha\in\Delta^Q_0$.*

Preuve de (i). Les hypothèses $\phi^Q(H-T)=1$ et $<\alpha,H>\geq 0$ pour tout $\alpha\in\Delta^Q_0$ entraînent que $H^L$ appartient à $\mathcal{C}^L(T^L)$. Donc $\mathcal{C}^L(H)\subset\mathcal{C}^L(H_L+T^L)$. Posons $H_\star=H_L-T_L$. On obtient $\mathcal{C}^L(H)\subset\mathcal{C}^L(T+H_\star)$. Soient $H',H''\in\mathcal{C}^L(T+H_\star)$. Posons $s=w\theta(w')^{-1}$. On veut minorer $|H'-s\theta H''|$. On a

$$(1)\qquad |H'-s\theta H''|\geq|X|,$$

où $X=(H'-s\theta H'')^M_L$. On a ${H'}^M_L=T^M_L+H^M_\star$ parce que $H'\in\mathcal{C}^L(T+H_\star)$, d'où $X=T^M_L+H^M_\star-(s\theta H'')^M_L$. L'hypothèse que $H''\in\mathcal{C}^L(T+H_\star)$ signifie que l'on peut écrire $H''=H_\star+\sum_{u\in W^L}y_uuT$, avec des $y_u\geq 0$ tels que $\sum_{u\in W^L}y_u=1$. Donc

$$X=T^M_L+H^M_\star-(s\theta H_\star)^M_L-\sum_{u\in W^L}y_u(s\theta uT)^M_L.$$

Posons $Y_u=T^M_L-(s\theta uT)^M_L$ et $Y=\sum_{u\in W^L}y_uY_u$. Alors $X=H^M_\star-(s\theta H_\star)^M_L+Y$. Pour tout $u\in W^L$, on a $Y_u=(T-s\theta uT)^M_L=(T-u'T)^M_L$, où $u'=s\theta(u)$, puisque $\theta T=T$. L'hypothèse $(w,w')\in\mathcal{W}^P_Q$ entraîne que $s\in W^M$ donc aussi $u'\in W^M$. Puisque $T$ est dominant, $T-u'T$ est combinaison linéaire à coefficients positifs ou nuls de $\check{\alpha}$

pour $\alpha \in \Delta_0^P$. Donc $Y_u$ est combinaison linéaire à coefficients positifs ou nuls de $\check{\alpha}_L$ pour $\alpha \in \Delta_0^P - \Delta_0^Q$. L'élément $Y$ vérifie la même propriété. Par ailleurs, l'hypothèse $\tau_Q^P(H-T) = 1$ signifie que $H_\star^M$ est combinaison linéaire à coefficients strictement positifs de $\check{\varpi}_\alpha^M$ pour $\alpha \in \Delta_0^P - \Delta_0^Q$. Soit $U = \sum_{\alpha \in \Delta_0^P - \Delta_0^Q} u_\alpha \check{\varpi}_\alpha^M$ et $V = \sum_{\alpha \in \Delta_0^P - \Delta_0^Q} v_\alpha \check{\alpha}_L$ avec des coefficients $u_\alpha$ et $v_\alpha$ positifs ou nuls. Montrons que l'on a une majoration

$$(2) \qquad |U| + |V| << |U - (s\theta U)_L + V|.$$

Il suffit de prouver que le cône engendré par les $\check{\varpi}_\alpha^M - (s\theta\check{\varpi}_\alpha^M)_L$ et les $\check{\alpha}_L$ est un "vrai" cône, c'est-à-dire ne contient pas d'espace vectoriel non nul. Il revient au même de prouver que, pour $U$ et $V$ comme ci-dessus, l'égalité $U - (s\theta U)_L + V = 0$ entraîne $U = 0$, $V = 0$. Or le produit scalaire $(U, V)$ est positif ou nul. Par produit scalaire avec $U$, l'égalité $U - (s\theta U)_L + V = 0$ entraîne donc $(U, U - (s\theta U)_L) \leq 0$, d'où $(U, U) \leq (U, (s\theta U)_L)$. Par Cauchy-Schwartz, cela implique $U = (s\theta U)_L$ puis $U = s\theta U$. Si $U \neq 0$, notons $\Delta_0(U)$ l'ensemble des $\alpha \in \Delta_0^P$ tels que $< \alpha, U >> 0$. Cet ensemble est non vide et inclus dans $\Delta_0^P - \Delta_0^Q$. Introduisons le sous-groupe parabolique standard $P' = M'U_{P'}$ tel que $\Delta_0^{M'} = \Delta_0^P - \Delta_0(U)$.On a $Q \subset P' \subsetneq P$. L'élément $U$ appartient à la chambre positive relative au sous-groupe parabolique $M \cap P'$ de $M$. L'égalité $U = s\theta U$ entraîne $P' = s\theta(P')$. Puisque $P'$ et $s\theta(P')$ sont standard, cela implique $P' = \theta(P')$ et $s \in W^{M'}$. Mais alors $(w, w') \in \mathcal{W}_Q^{P'}$, ce qui contredit l'hypothèse de minimalité de $\tilde{P}$. Cette contradiction prouve que $U = 0$. L'égalité $U - (s\theta U)_L + V = 0$ entraîne alors que $V = 0$, ce qui prouve (2).

On applique (2) à $U = H_\star^M$ et $V = Y$. En abandonnant le terme $|Y|$, on obtient la majoration $|H_\star^M| << |X|$. Grâce à (1), cela entraîne la majoration du (i) de l'énoncé.

La preuve du (ii) est similaire, il suffit de supprimer le terme $s$ des calculs.

Preuve de (iii). On reprend la preuve de (i). A la fin de cette preuve, on avait abandonné le terme $|Y|$. Rétablissons-le. Pour obtenir le (iii) de l'énoncé, il suffit de prouver que, pour tout $u \in W^L$, on a une majoration

$$(3) \qquad |T| << |Y_u|.$$

Notons $\Sigma^M$ l'ensemble des racines de $A_0$ dans l'algèbre de Lie de $M$, muni de la positivité définie par $P_0 \cap M$. On sait plus précisément que $T - u'T$ est combinaison linéaire des $\check{\alpha}$ pour toutes les racines $\alpha \in \Sigma^M$ telles que $\alpha > 0$ et $(u')^{-1}\alpha < 0$. Les coefficients sont de la forme $< \beta, T >$ pour des $\beta \in \Sigma^M$, $\beta > 0$, donc sont essentiellement minorés par $|T|$. L'assertion (3) s'en déduit pourvu qu'il y ait au moins une racine $\alpha$ telle que $\alpha > 0$, $(u')^{-1}\alpha < 0$ et $\check{\alpha}_L \neq 0$. S'il n'en est pas ainsi, on a $u' \in W^L$. L'égalité $u' = w\theta(w')^{-1}\theta(u)$, jointe au fait que $u \in W^L$, entraîne alors que $W^L w \cap \theta(W^L w') \neq \emptyset$, contrairement à l'hypothèse. Cela prouve (3) et achève la preuve du (iii) de l'énoncé.

Preuve de (iv). L'hypothèse $s_Q^R(w, w') \neq 0$ signifie qu'il existe un unique espace parabolique $\tilde{P} = \tilde{M}U_P$ tel que $Q \subset P \subset R$ et $(w, w') \in \mathcal{W}_Q^P$. On reprend la preuve du (i). On a encore $s \in W^M$. Pour $H', H'' \in \mathcal{C}^L(T + H_\star)$, on a

$$|H' - s\theta H''| >> |(H' - s\theta H'')_L^M| + |(H' - s\theta H'')_M|.$$

La preuve de (i) s'applique au premier terme : on a une majoration

$$(4) \qquad |(H' - s\theta H'')_L^M| >> |H_\star^M|,$$

où $H_\star = (H - T)_L$. On a $(H' - s\theta H'')_M = H_{\star,M} - \theta(H_{\star,M})$ puisque $s \in W^M$. Ecrivons $H_{\star,M} = H_1 + H_2$ où $H_1 \in \mathcal{A}_{\tilde{M}}$ et $H_2$ appartient à l'orthogonal $\mathcal{A}_M^{\tilde{M}}$ de ce sous-espace dans $\mathcal{A}_M$. On a $H_{\star,M} - \theta(H_{\star,M}) = H_2 - \theta H_2$ et $1-\theta$ est injective sur $\mathcal{A}_M^{\tilde{M}}$, d'où une majoration

$$(5) \qquad |H_2| << |H_{\star,M} - \theta(H_{\star,M})|.$$

La condition $\tilde{\sigma}_Q^R(H_\star) = 1$ entraîne que

(6) $< \varpi_\alpha, H_1 >> 0$ pour tout $\alpha \in \Delta_0 - \Delta_0^P$.

Elle entraîne aussi que $< \alpha, H_\star > \leq 0$ pour tout $\alpha \in \Delta_0 - \Delta_0^R$. On remarque que, pour tout $\alpha \in \Delta_0 - \Delta_0^P$, il existe $i \geq 1$ tel que $\theta^i\alpha \notin \Delta_0^R$ : sinon l'espace parabolique standard $\tilde{P}'$ associé à la réunion de $\tilde{\Delta}_0^P$ et de $\{\tilde{\alpha}\}$ vérifierait $P \subsetneq P' \subset R$, ce qui contredirait l'hypothèse d'unicité de $\tilde{P}$. Pour $\alpha \in \Delta_0 - \Delta_0^P$ et $i \geq 1$ comme ci-dessus, on a

$$(7) \qquad < \alpha, H_1 >=< \theta^i\alpha, H_1 >=< \theta^i\alpha, H_\star - H_2 - H_\star^M > \leq - < \theta^i\alpha, H_2 + H_\star^M > .$$

Les conditions (6) et (7) bornent $|H_1^{\tilde{G}}|$ : on a une majoration

$$|H_1^{\tilde{G}}| << |H_2| + |H_\star^M|.$$

Grâce à (5), on en déduit

$$|H_{\star,M}^{\tilde{G}}| << |H_{\star,M} - \theta(H_{\star,M})| + |H_\star^M|.$$

D'où, grâce à (4),

$$|H_\star^{\tilde{G}}| << |H_{\star,M} - \theta(H_{\star,M})| + |(H' - s\theta H'')_L^M| << |H' - s\theta H''|.$$

Cela prouve l'assertion (iv) de l'énoncé. $\square$

## 3.6 Majoration de coefficients

**Lemme**. *Soient $Q = LU_Q$ un parabolique standard, $w \in W^G(L|S)$ et $w' \in W^G(L|S')$. Quel que soit le réel $r$, il existe $c > 0$ tel que l'on ait la majoration*

$$|\omega_{Q,w,w'}(m)| \leq c\delta_Q(m)^{-1}\Xi^L(m)^2 N_{w,w'}^L(H_0(m))^{-r}$$

*pour tout $m \in M_0(F)$.*

Preuve. Notons $\rho_{w\lambda}^G = Ind_{\underline{Q}_w}^G((w\sigma)_{w\lambda})$, $\rho'^G_{w'\lambda'} = Ind_{\underline{Q}_{w'}}((w'\sigma')_{w'\lambda'})$, $\rho_{w\lambda} = Ind_{w(S)\cap L}^L((w\sigma)_{w\lambda})$, $\rho'_{w'\lambda'} = Ind_{w'(S')\cap L}^L((w'\sigma')_{w'\lambda'})$ que l'on réalise dans leurs espaces habituels $V_{w\sigma,\underline{Q}_w}$, $V_{w'\sigma',\underline{Q}_{w'}}$, $V_{w\sigma,w(S)\cap L}^L$, $V_{w'\sigma',w'(S')\cap L}^L$. D'après 3.4(1) et (2), $\omega_{Q,w,w'}(m,k,k',\lambda)m^G(\sigma_\lambda)$ est combinaison linéaire de termes

$$(v_0, \rho_{w\lambda}^G(m)u_0)^L(\rho'^G_{w'\lambda'}(m)v_0', u_0')^L$$

pour des éléments $u_0, v_0 \in V_{w\sigma,\underline{Q}_w}$ et $u_0', v_0' \in V_{w'\sigma',\underline{Q}_{w'}}$. Les coefficients sont des fonctions $C^\infty$ de $\lambda$, $k$ et $k'$ et sont à croissance modérée en $\lambda$. On dispose d'applications

$$V_{w\sigma,\underline{Q}_w} \to V_{w\sigma,w(S)\cap L}^L, \; V_{w'\sigma',\underline{Q}_{w'}} \to V_{w'\sigma',w'(S')\cap L}^L$$

qui sont les restrictions à $K \cap L(F)$. En notant $e, f, e', f'$ les images de $u_0, v_0, u'_0, v'_0$ par ces applications, on a les égalités

$$(v_0, \rho^G_{w\lambda}(m)u_0)^L = \delta_Q(m)^{-1/2}(f, \rho_{w\lambda}(m)e),$$

$$(\rho'^G_{w'\lambda'}(m)v'_0, u'_0)^L = \delta_Q(m)^{-1/2}(\rho'_{w'\lambda'}(m)f', e').$$

Quitte à remplacer la fonction de Schwartz $B$ par son produit avec une fonction à croissance modérée, on est ramené à évaluer

$$(1) \qquad \delta_Q(m)^{-1} \int_{i\mathcal{A}^*_{M_{disc},F}} (f, \rho_{w\lambda}(m)e)(\rho'_{w'\lambda'}(m)f', e')B(\lambda)\, d\lambda.$$

On a

$$(f, \rho_{w\lambda}(m)e) = \int_{K\cap L(F)} (f(k), (\rho_{w\lambda}(m)e)(k))\, dk,$$

où le produit intérieur est le produit hermitien sur $V_{w\sigma}$. On a

$$(\rho_{w\lambda}(m)e)(k) = e^{<w\lambda, H_{\underline{Q}_w}(km)>}(\rho_w(m)e)(k),$$

où on a noté $\rho_w$ la représentation $\rho_{w\lambda}$ pour $\lambda = 0$. En utilisant des formules similaires pour le terme $(\rho'_{w'\lambda'}(m)f', e')$, on obtient que (1) est égal à

$$\delta_Q(m)^{-1} \int_{(K\cap L(F))\times(K\cap L(F))} (f(k), (\rho_w(m)e)(k))((\rho'_{w'}(m)f')(k'), e'(k'))\beta(m,k,k')\, dk\, dk',$$

où

$$\beta(m,k,k') = \int_{i\mathcal{A}^*_{M_{disc},F}} B(\lambda)e^{<w\lambda, H_{\underline{Q}_w}(km)> - <w'\lambda', H_{\underline{Q}_{w'}}(k'm)>}\, d\lambda.$$

On va prouver que, pour tout réel $r$, il existe $c > 0$ tel que

$$(2) \qquad |\beta(m,k,k')| \leq cN^L_{w,w'}(H_0(m))^{-r}.$$

Admettons cela et finissons la démonstration. De (2) résulte que (1) est essentiellement majoré par

$$\delta_Q(m)^{-1}N^L_{w,w'}(H_0(m))^{-r}$$

$$\int_{(K\cap L(F))\times(K\cap L(F))} |(f(k), (\rho_w(m)e)(k))((\rho'_{w'}(m)f')(k'), e'(k'))|\, dk\, dk'.$$

En utilisant 1.12(4), la double intégrale est essentiellement majorée par $\Xi^L(m)^2$ et on obtient la majoration de l'énoncé.

Démontrons (2). On commence par prouver

(3) pour tout parabolique standard $Q' = L'U_{Q'} \subset Q$ et tout $k \in K \cap L(F)$, $H_{Q'}(km)$ appartient à $\mathcal{C}^L(H_0(m))$.

Quitte à conjuguer $m$ par un élément de $K \cap Norm_{L(F)}(M_0)$, ce qui ne change pas notre problème, on peut supposer $< \alpha, H_0(m) >\geq 0$ pour tout $\alpha \in \Delta^Q_0$. D'après le lemme 1.3, $H_0(km)$ appartient à $\mathcal{C}^L(H_0(m))$. L'élément $H_{Q'}(km)$ est la projection orthogonale de $H_0(km)$ sur $\mathcal{A}_{L'}$. On est ramené à montrer que, pour $H \in \mathcal{C}^L(H_0(m))$, alors la projection $H_{L'}$ de $H$ sur $\mathcal{A}_{L'}$ appartient aussi à $\mathcal{C}^L(H_0(m))$. L'espace $\mathcal{A}^L_{L'}$ est réunion des chambres positives associées aux paraboliques $Q'' \in \mathcal{P}^L(L')$. On fixe un tel $Q''$ tel que $H^L_{L'}$ appartienne à la chambre associée à $Q''$ et on fixe $s \in W^L$ tel que $s(Q'')$ soit standard. Alors $H_{L'} = s^{-1}((sH)_{s(L')})$. Puisque $\mathcal{C}^L(H_0(m))$ est invariant par l'action de $s$, on peut aussi bien remplacer $H$ par $sH$ et $L'$ par $s(L')$. En oubliant cette construction, on est ramené au cas où $< \alpha, H_{L'} >\geq 0$ pour tout $\alpha \in \Delta_0^Q$. Dans ce cas, l'appartenance à $\mathcal{C}^L(H_0(m))$ équivaut à ce que $H_0(m) - H_{L'}$ soit une combinaison linéaire à coefficients positifs ou nuls de $\check{\alpha}$ pour $\alpha \in \Delta_0^Q$. On a

$$H_0(m) - H_{L'} = H_0(m) - H_0(m)_{L'} + H_0(m)_{L'} - H_{L'}.$$

La première différence est égale à $H_0(m)^{L'}$ qui appartient à la chambre positive fermée de $\mathcal{A}_0^{L'}$, a fortiori est combinaison linéaire à coefficients positifs ou nuls de $\check{\alpha}$ pour $\alpha \in \Delta_0^{Q'}$. La deuxième différence est la projection de $H_0(m)-H$. Puisque $H \in \mathcal{C}^L(H_0(m))$, $H_0(m)-H$ est une combinaison linéaire à coefficients positifs ou nuls de $\check{\alpha}$ pour $\alpha \in \Delta_0^Q$. Donc $H_0(m)_{L'} - H_{L'}$ est une telle combinaison linéaire de $\check{\alpha}_{L'}$, pour $\alpha \in \Delta_0^Q$. Il suffit de voir qu'une telle projection est de la forme voulue. C'est clair si $\alpha \in \Delta_0^{Q'}$ puisqu'alors $\check{\alpha}_{L'} = 0$. Soit $\alpha \in \Delta_0^Q - \Delta_0^{Q'}$. Alors $\check{\alpha}_{L'} = \check{\alpha} - \check{\alpha}^{L'}$. Parce que $\{\check{\alpha}; \alpha \in \Delta_0^Q\}$ est une base obtuse de $\mathcal{A}_0^L$, $-\check{\alpha}^{L'}$ appartient à la chambre positive fermée de $\mathcal{A}_0^{L'}$. A fortiori, $-\check{\alpha}^{L'}$ est combinaison linéaire à coefficients positifs ou nuls de $\check{\beta}$ pour $\beta \in \Delta_0^{Q'}$. Cela prouve (3).

Le terme $\beta(m,k,k')$ est la transformée de Fourier de $B$ évaluée en $\theta((w')^{-1}H') - w^{-1}H$, où $H = H_{\underline{Q}_w}(km)$ et $H' = H_{\underline{Q}_{w'}}(k'm)$. Il est donc essentiellement majoré par $(1+|\theta((w')^{-1}H')-w^{-1}H|)^{-r}$ pour tout réel $r$, ou encore par $(1+|(w\circ\theta\circ(w')^{-1})H'-H|)^{-r}$. Puisque $k'm$ et $km$ appartiennent à $L(F)$, on a les égalités $H = H_{Q_w}(km)$ et $H' = H_{Q_{w'}}(k'm)$. Les paraboliques $Q_w$ et $Q_{w'}$ sont standard. Grâce à (3), $H$ et $H'$ appartiennent à $\mathcal{C}^L(H_0(m))$. Donc $1 + |\theta((w')^{-1}H') - w^{-1}H| \geq N^L_{w,w'}(H_0(m))$ et la majoration (2) s'ensuit. $\square$

Pour tout parabolique standard $Q = LU_Q$ et pour $m \in M_0(F)$, posons

$$\Omega_Q(m) = \sum_{(w,w')\in\mathcal{W}_Q} \omega_{Q,w,w'}(m).$$

Remarquons que, dans le cas où $Q = G$, on retrouve la fonction $\Omega_G$ déjà définie.

**Corollaire**. *Pour tout parabolique standard $Q = LU_Q$ et pour tout réel $r$, il existe $c > 0$ tel que l'on ait la majoration*

$$|\Omega_Q(m)| \leq c\delta_Q(m)^{-1}\Xi^L(m)^2 N^L(H_0(m))^{-r}$$

*pour tout $m \in M_0(F)$.*

## 3.7 Un lemme d'équivalence

Soient $x^T(m)$ et $y^T(m)$ deux fonctions des variables $T$ et $m \in M_0(F)^{\geq}$. On dit que ces fonctions sont équivalentes si et seulement si elles vérifient la condition suivante : pour tout réel $\nu > 0$ et pour tout réel $r$, il existe $c > 0$ de sorte que l'on ait l'inégalité

$$|x^T(m) - y^T(m)| \leq c|T|^{-r}$$

pour tout $T$ et tout $m \in M_0(F)^{\geq}$ tel que $|H_0(m)| \leq \nu|T|$.

**Lemme**. *Soit $\tilde{P} = \tilde{M}U_P$ un espace parabolique contenant $\tilde{P}_0$, soit $Q = LU_Q$ un sous-groupe parabolique tel que $P_0 \subset Q \subset P$ et soit $\epsilon > 0$.*

*(i) Les fonctions $\phi^Q(H_0(m)-\epsilon T)\tau_Q^P(H_0(m)-\epsilon T)\Omega_P(m)\delta_{P_0}(m)$ et $\gamma(M|L)^2\phi^Q(H_0(m)-\epsilon T)\tau_Q^P(H_0(m)-\epsilon T)\Omega_Q(m)\delta_{P_0}(m)$ sont équivalentes.*

*(ii) Soient $w \in W^G(L|S)$ et $w' \in W^G(L|S')$. Supposons $(w, w') \in \mathcal{W}_Q^P - \mathcal{W}_Q$. Alors la fonction $\phi^Q(H_0(m)-\epsilon T)\tau_Q^P(H_0(m)-\epsilon T)\omega_{Q,w,w'}(m)\delta_{P_0}(m)$ est équivalente à 0.*

Preuve. On fixe $\nu > 0$. Les $m$ à considérer vérifient

- $m \in M_0(F)^{\geq}$ ;

- $\phi^Q(H_0(m)-\epsilon T)\tau_Q^P(H_0(m)-\epsilon T) = 1$, ce qui entraîne $< \alpha, H_0(m) >>< \alpha, \epsilon T >$ pour tout $\alpha \in \Delta_0^P - \Delta_0^Q$ ;

- $|H_0(m)| \leq \nu|T|$.

En conséquence

(1) il existe un réel $\nu'$ ne dépendant que de $\nu$ tel que l'on ait $< \alpha, H_0(m) >> \nu'|H_0(m)|$ pour $\alpha \in \Delta_0^P - \Delta_0^Q$.

On peut donc approximer les produits scalaires intervenant dans $\Omega_P(m)$ par leurs termes constants faibles. Précisément, soient $(w, w') \in \mathcal{W}_P$. Considérons le terme

$$X_w(m,k,k',\lambda) = (R_{P_w|w(S)}((w\sigma)_{w\lambda})\circ\gamma(w)\circ\sigma_\lambda(k)v, R_{\underline{P}_w|w(S)}((w\sigma)_{w\lambda})\circ\gamma(w)\circ\sigma_\lambda(mk')u)^M$$

qui intervient dans $\omega_{P,w,w'}(m,k,k',\lambda)$. On a vu dans la preuve précédente que l'on pouvait aussi l'écrire

$$\delta_P(m)^{-1/2}(v_w(k,\lambda), \rho_{P,w\lambda}(m)u_w(k',\lambda)),$$

où $\rho_{P,w\lambda} = Ind_{w(S)\cap M}^M((w\sigma)_{w\lambda})$, $u_w(k',\lambda)$ est la restriction à $K \cap M(F)$ de

$$R_{\underline{P}_w|w(S)}((w\sigma)_{w\lambda}) \circ \gamma(w) \circ \sigma_\lambda(k')u,$$

et $v_w(k,\lambda)$ est la restriction à $K \cap M(F)$ de

$$R_{P_w|w(S)}((w\sigma)_{w\lambda}) \circ \gamma(w) \circ \sigma_\lambda(k)v.$$

Notons $Y_{Q,w}(m,k,k',\lambda)$ le terme constant faible relatif à $Q$ de

$$(v_w(k,\lambda), \rho_{P,w\lambda}(m)u_w(k',\lambda)),$$

multiplié par $\delta_Q(m)^{-1/2}$. Remarquons que les éléments $u_w(k',\lambda)$ et $v_w(k,\lambda)$ restent dans des espaces de dimension finie et, quand on les écrit dans une base de ces espaces, leurs coefficients sont des fonctions bornées de $k, k'$ et de $\lambda$. D'après (1), on peut appliquer la proposition 1.12 où l'on remplace $G$ par $M$. Il existe donc $c > 0$ et une fonction $C_1$ sur $i\mathcal{A}^*_{M_{disc},F}$, lisse, à croissance modérée et à valeurs positives, de sorte que l'on ait la majoration

$$|X_w(m,k,k',\lambda) - Y_{Q,w}(m,k,k',\lambda)| \leq C_1(\lambda)\delta_Q(m)^{-1/2}\Xi^L(m)e^{-c|H_0(m)|}$$

pour tous $k$, $k'$, $\lambda$ et tout $m$ dans le domaine décrit ci-dessus. Notons que la condition $\tau_Q^P(H_0(m)-\epsilon T) = 1$ entraîne une minoration $|H_0(m)| >> |T|$ (sauf dans le cas où $P = Q$, mais alors le lemme est tautologique). Pour $m \in M_0(F)^{\geq}$, on a aussi

$$\Xi^L(m) << (1+|H_0(m)|)^{D_1}\delta_{P_0}^Q(m)^{-1/2} << |T|^{\nu D_1}\delta_{P_0}^Q(m)^{-1/2}$$

pour un entier $D_1$ convenable. Quitte à réduire $c$, on a donc

$$(2)\qquad |X_w(m,k,k',\lambda) - Y_{Q,w}(m,k,k',\lambda)| \leq C_1(\lambda)\delta_{P_0}(m)^{-1/2}e^{-c|T|}.$$

D'après 1.2(2) et 1.12(3), on a aussi

$$(3)\qquad |X_w(m,k,k',\lambda)| << (1+|H_0(m)|)^{D_2}\delta_{P_0}(m)^{-1/2} << |T|^{\nu D_2}\delta_{P_0}(m)^{-1/2},$$

pour un autre entier $D_2$. Par différence, on en déduit

$$(4)\qquad |Y_{Q,w}(m,k,k',\lambda)| << C_2(\lambda)|T|^{\nu D_2}\delta_{P_0}(m)^{-1/2},$$

pour une autre fonction $C_2$.

On traite de la même façon le terme

$$X_{w'}(m,k,k',\lambda) =$$

$$(R_{\underline{P}_{w'}|w'(S')}((w'\sigma')_{w'\lambda'}) \circ \gamma(w') \circ \pi'_{\lambda'}(mk')v', R_{P_{w'}|w'(S')}((w'\sigma')_{w'\lambda'}) \circ \gamma(w') \circ \pi'_{\lambda'}(k)u')^M$$

qui intervient dans $\omega_{P,w,w'}(m,k,k',\lambda)$. On définit $Y_{Q,w'}(m,k,k',\lambda)$, qui vérifie des majorations analogues à celles ci-dessus.

Rappelons l'égalité

$$\omega_{P,w,w'}(m) = \int_{K\times K}\int_{i\mathcal{A}^*_{M_{disc},F}} m^G(\sigma_\lambda)B(\lambda)\mathbf{r}_{w,w'}(\sigma_\lambda)X_w(m,k,k',\lambda)$$

$$X_{w'}(m,k,k',\lambda)\omega(k^{-1}mk')\,d\lambda\,dk\,dk'.$$

Posons

$$\omega_{Q,w,w'}(m) = \gamma(M|L)^2\int_{K\times K}\int_{i\mathcal{A}^*_{M_{disc},F}} m^G(\sigma_\lambda)B(\lambda)\mathbf{r}_{w,w'}(\sigma_\lambda)Y_{Q,w}(m,k,k',\lambda)$$

$$Y_{Q,w'}(m,k,k',\lambda)\omega(k^{-1}mk')\,d\lambda\,dk\,dk'.$$

En utilisant les majorations précédentes, on obtient

$$|\omega_{P,w,w'}(m) - \gamma(M|L)^{-2}\omega_{Q,w,w'}(m)|\delta_{P_0}(m) \leq e^{-c|T|}\int_{i\mathcal{A}^*_{M_{disc},F}} |C(\lambda)B(\lambda)m^G(\sigma_\lambda)\mathbf{r}_{w,w'}(\sigma_\lambda)|\,d\lambda$$

pour une certaine fonction $C$ à croissance modérée. L'intégrale ci-dessus est convergente, donc les fonctions $\phi^Q(H_0(m)-\epsilon T)\tau_Q^P(H_0(m)-\epsilon T)\omega_{P,w,w'}(m)\delta_{P_0}(m)$ et $\gamma(M|L)^{-2}\phi^Q(H_0(m)-\epsilon T)\tau_Q^P(H_0(m)-\epsilon T)\omega_{Q,w,w'}(m)\delta_{P_0}(m)$ sont équivalentes.

On calcule $Y_{Q,w}(m,k,k',\lambda)$ en utilisant les définitions de 1.12. On doit y remplacer $G$ par $M$, $P$ par $w(S)\cap M$, $Q$ par $Q\cap M$ et $\sigma_\lambda$ par $(w\sigma)_{w\lambda}$. Notons que, pour $s \in W^M(L|w(S)\cap M)$, les opérateurs $J^M_{(Q\cap M)_s|sw(S)\cap M}((sw\sigma)_{sw\lambda})$ et $J^M_{\underline{(Q\cap M)}_s|sw(S)\cap M}((sw\sigma)_{sw\lambda})$ qui interviennent en 1.12 définissent par induction les opérateurs $J_{Q_{sw}|s(P_w)}((sw\sigma)_{sw\lambda})$ et $J_{\underline{Q}_{sw}|s(\underline{P}_w)}((sw\sigma)_{sw\lambda})$, avec les mêmes définitions qu'en 3.4. En rétablissant les opérateurs d'entrelacement non normalisés dans la définition de $X_w(m,k,k',\lambda)$ et en utilisant les propriétés habituelles de ces opérateurs, on obtient l'égalité

$$Y_{Q,w}(m,k,k',\lambda) = \gamma(M|L)^{-1}r_{\underline{P}_w|w(S)}((w\sigma)_{w\lambda})^{-1}r_{w(S)|P_w}((w\sigma)_{w\lambda})^{-1}$$

$$\sum_{s\in W^M(L|w(S)\cap M)} (J_{Q_{sw}|sw(S)}((sw\sigma)_{sw\lambda})\circ\gamma(sw)\circ\pi_\lambda(k)v, J_{\underline{Q}_{sw}|sw(S)}((sw\sigma)_{sw\lambda})\circ\gamma(sw)\circ\pi_\lambda(mk')u)^L.$$

Remarquons que l'appication $s\mapsto sw$ est une bijection de $W^M(L|w(S)\cap M)$ sur l'ensemble des $s\in W^G(L|S)$ tels que $s\in W^Mw$. On calcule de même $Y_{Q,w'}(m,k,k',\lambda)$.

Notons $\mathcal{W}^P_{Q,w,w'}$ l'ensemble des $(s,s')\in W^G(L|S)\times W^G(L|S')$ tels que $s\in W^Mw$ et $s'\in W^Mw'$. Les calculs précédents conduisent à l'égalité

$$\omega_{Q,w,w'}(m)=\sum_{(s,s')\in\mathcal{W}^P_{Q,w,w'}}\omega_{Q,s,s'}(m).$$

Le terme $\Omega_P(m)$ est la somme des $\omega_{P,w,w'}(m)$ sur les $(w,w')\in\mathcal{W}_P$. On a $\cup_{(w,w')\in\mathcal{W}_P}\mathcal{W}_{Q,w,w'}=\mathcal{W}^P_Q$. Posons

$$\Omega^P_Q(m)=\sum_{(s,s')\in\mathcal{W}^P_Q}\omega_{Q,s,s'}(m).$$

On obtient que les fonctions $\phi^Q(H_0(m)-\epsilon T)\tau^P_Q(H_0(m)-\epsilon T)\Omega_P(m)\delta_{P_0}(m)$ et $\gamma(M|L)^{-2}\phi^Q(H_0(m)-\epsilon T)\tau^P_Q(H_0(m)-\epsilon T)\Omega^P_Q(m)\delta_{P_0}(m)$ sont équivalentes. Pour obtenir le (i) de l'énoncé, il reste à prouver que la dernière fonction est équivalente à $\gamma(M|L)^{-2}\phi^Q(H_0(m)-\epsilon T)\tau^P_Q(H_0(m)-\epsilon T)\Omega_Q(m)\delta_{P_0}(m)$. Or il suffit pour cela de prouver le (ii) de l'énoncé.

Soient maintenant $w$, $w'$ comme en (ii). En utilisant le lemme 3.6 et la majoration $\Xi^L(m)^2<<(1+|H_0(m)|)^D\delta^Q_{P_0}(m)^{-1}$ pour $m\in M_0(F)^{\geq,Q}$, cf. 1.2(2), il suffit pour prouver (ii) que, pour $m$ dans le domaine qui nous intéresse, on ait une minoration

$$N^L_{w,w'}(H_0(m))>>|T|.$$

Mais soit $\tilde{P}'=\tilde{M}'U_{P'}$ le plus petit espace parabolique standard tel que $Q\subset P'$ et $(w,w')\in\mathcal{W}^{P'}_Q$. On a $P'\subset P$. La condition $\tau^P_Q(H_0(m)-\epsilon T)=1$ entraîne $\tau^{P'}_Q(H_0(m)-\epsilon T)=1$. On peut appliquer le lemme 3.5(iii) qui nous fournit la minoration

$$N^L_{w,w'}(H_0(m))>>\epsilon|T|+|(H_0(m)-T)^{M'}_L|$$

plus forte que celle dont on a besoin. $\square$

## 3.8 Un deuxième lemme d'équivalence

**Lemme**. *Soit $\tilde{P}=\tilde{M}U_P$ un espace parabolique contenant $\tilde{P}_0$, soit $Q=LU_Q$ un sous-groupe parabolique tel que $P_0\subset Q\subset P$ et soit $\epsilon>0$.*

*(i) Les fonctions $\phi^Q(H_0(m)-\epsilon T)\tau^P_Q(H_0(m)-\epsilon T)\Omega_P(m)\delta_P(m)D^M_0(m)$ et $\phi^Q(H_0(m)-\epsilon T)\tau^P_Q(H_0(m)-\epsilon T)\Omega_Q(m)\delta_Q(m)D^L_0(m)$ sont équivalentes.*

*(ii) Soient $w\in W^G(L|S)$ et $w'\in W^G(L|S')$. Supposons $(w,w')\in\mathcal{W}^P_Q-\mathcal{W}_Q$. Alors la fonction $\phi^Q(H_0(m)-\epsilon T)\tau^P_Q(H_0(m)-\epsilon T)\omega_{Q,w,w'}(m)\delta_Q(m)D^L_0(m)$ est équivalente à 0.*

Preuve. On a une majoration $\delta_P(m)D^M_0(m)<<\delta_{P_0}(m)$ pour tout $m\in M_0(F)^{\geq}$, cf. 1.2(1). On peut donc multiplier les deux fonctions du (i) l'énoncé précédent par la fonction bornée $\delta_{P_0}(m)^{-1}\delta_P(m)D^M_0(m)$, elles restent équivalentes. On obtient que la première fonction du (i) du présent énoncé est équivalente à la fonction

$$(1)\qquad \gamma(M|L)^{-2}\phi^Q(H_0(m)-\epsilon T)\tau^P_Q(H_0(m)-\epsilon T)\Omega_Q(m)\delta_P(m)D^M_0(m).$$

Comme on l'a vu dans la preuve précédente, une fois fixé un réel $\nu$, on a une minoration $<\alpha, H_0(m)>>>> \nu'|H_0(m)|$ pour les $m$ intervenant. D'après [A1] lemme 1.1 et en tenant compte de la remarque 1.2, il existe $c>0$ tel que l'on ait une majoration

$$|\gamma(M|L)^{-2}\delta_P(m)D_0^M(m)-\delta_Q(m)D_0^L(m)| << \delta_{P_0}(m)e^{-c|H_0(m)|}.$$

De nouveau, on a vu dans la preuve précédente que l'on avait une minoration $|H_0(m)|>> |T|$, sauf si $P=Q$ auquel cas le lemme est tautologique. On peut remplacer la majoration ci-dessus par

$$|\gamma(M|L)^{-2}\delta_P(m)D_0^M(m)-\delta_Q(m)D_0^L(m)| << \delta_{P_0}(m)e^{-c|T|}$$

pour un autre $c>0$. Il résulte du corollaire 3.6 et de 1.2(2) que l'on a une majoration

$$|\Omega_Q(m)| << (1+|H_0(m)|)^D\delta_{P_0}(m)^{-1}$$

pour un entier $D$ convenable. De ces deux dernières majorations résulte que la fonction (1) est équivalente à la deuxième fonction du (i) de l'énoncé. Cela démontre ce (i). Le (ii) résulte du (ii) du lemme précédent par multiplication par la fonction bornée $\delta_{P_0}(m)^{-1}\delta_P(m)D_0^M(m)$. $\square$

## 3.9 Un troisième lemme d'équivalence

**Lemme**. *Soient $Q=LU_Q$ un sous-groupe parabolique standard, $\tilde{P}=\tilde{M}U_P$ et $\tilde{P}'=\tilde{M}'U_{P'}$ deux espaces paraboliques standard et soit $\epsilon>0$. Notons $\tilde{P}_-=\tilde{M}_-U_{P_-}$ le plus grand espace parabolique standard tel que $P_-\subset Q$. On suppose $Q\subset P$ et $P_-\subset P'\subset P$. Alors les fonctions*

$$\phi^Q(H_0(m-\epsilon T)\tau_Q^P(H_0(m)-\epsilon T)\Omega_{P'}(m)\delta_{P'}(m)D_0^{M'}(m)$$

*et*

$$\phi^Q(H_0(m-\epsilon T)\tau_Q^P(H_0(m)-\epsilon T)\Omega_{P_-}(m)\delta_{P_-}(m)D_0^{M_-}(m)$$

*sont équivalentes.*

Preuve. Fixons $\epsilon'>0$ que l'on précisera plus tard. On utilise l'égalité

$$\sum_{Q';P_0\subset Q'\subset P'}\phi^{Q'}(H_0(m)-\epsilon'T)\tau_{Q'}^{P'}(H_0(m)-\epsilon'T)=1$$

cf. 1.3(2). On peut fixer $Q'=L'U_{Q'}$ et prouver que les produits de nos fonctions avec $\phi^{Q'}(H_0(m)-\epsilon'T)\tau_{Q'}^{P'}(H_0(m)-\epsilon'T)$ sont équivalentes. D'après le lemme précédent, les fonctions

$$\phi^{Q'}(H_0(m)-\epsilon'T)\tau_{Q'}^{P'}(H_0(m)-\epsilon'T)\Omega_{P'}(m)\delta_{P'}(m)D_0^{M'}(m)$$

et

$$\phi^{Q'}(H_0(m)-\epsilon'T)\tau_{Q'}^{P'}(H_0(m)-\epsilon'T)\Omega_{Q'}(m)\delta_{Q'}(m)D_0^{L'}(m)$$

sont équivalentes. La première fonction de l'énoncé, multipliée par $\phi^{Q'}(H_0(m)-\epsilon'T)\tau_{Q'}^{P'}(H_0(m)-\epsilon'T)$, est alors équivalente à

$$(1)\qquad \phi^Q(H_0(m-\epsilon T)\tau_Q^P(H_0(m)-\epsilon T)\phi^{Q'}(H_0(m)-\epsilon'T)$$

$$\tau_{Q'}^{P'}(H_0(m)-\epsilon'T)\Omega_{Q'}(m)\delta_{Q'}(m)D_0^{L'}(m).$$

Supposons que $Q'\subset P_-$. Alors l'égalité $\phi^{Q'}(H_0(m)-\epsilon'T)\tau_{Q'}^{P'}(H_0(m)-\epsilon'T)=1$ entraîne $\phi^{Q'}(H_0(m)-\epsilon'T)\tau_{Q'}^{P_-}(H_0(m)-\epsilon'T)=1$. On peut appliquer le raisonnement ci-dessus en remplaçant $P'$ par $P_-$. On obtient que la deuxième fonction de l'énoncé, multipliée par $\phi^{Q'}(H_0(m)-\epsilon'T)\tau_{Q'}^{P'}(H_0(m)-\epsilon'T)$, est équivalente à (1), d'où la conclusion cherchée.

Supposons maintenant que $Q'\not\subset P_-$. Il nous suffit de prouver que la fonction (1) est équivalente à 0 et que la deuxième fonction de l'énoncé, multipliée par $\phi^{Q'}(H_0(m)-\epsilon'T)\tau_{Q'}^{P'}(H_0(m)-\epsilon'T)$, est elle-aussi équivalente à 0. En utilisant le corollaire 3.6 et les majorations maintenant familières portant sur les fonctions $D_0$ et $\Xi$, on voit qu'il suffit de prouver que, pour $m\in M_0(F)^{\geq}$ tel que

$$\phi^Q(H_0(m-\epsilon T)\tau_Q^P(H_0(m)-\epsilon T)\phi^{Q'}(H_0(m)-\epsilon'T)\tau_{Q'}^{P'}(H_0(m)-\epsilon'T)=1,$$

on a des minorations

$$(2)\qquad N^{L'}(H_0(m))>>|T|,\ N^{M_-}(H_0(m))>>|T|.$$

Remarquons que la condition $\phi^{Q'}(H_0(m)-\epsilon'T)=1$ entraîne $<\alpha,H_0(m)>\leq c_1\epsilon'|T|$ pour un certain $c_1>0$ et pour tout $\alpha\in\Delta_0^{Q'}$, tandis que la condition $\phi^Q(H_0(m)-\epsilon T)\tau_Q^P(H_0(m)-\epsilon T)=1$ entraîne $<\alpha,H_0(m)>>c_2|T|$ pour un certain $c_2>0$ et pour tout $\alpha\in\Delta_0^P-\Delta_0^Q$. En supposant $c_1\epsilon'<c_2$, nos fonctions sont nulles sauf si $Q'\subset Q$. On suppose donc $Q'\subset Q$. L'hypothèse $Q'\not\subset P_-$ signifie qu'il existe $\alpha\in\Delta_0^{Q'}$ tel que $\alpha\not\in\Delta_0^{P_-}$. Fixons un tel $\alpha$, qui appartient à $\Delta_0^Q$ par l'hypothèse $Q'\subset Q$ que l'on vient de poser. Par définition de $P_-$, $\Delta_0^{P_-}$ est l'ensemble des éléments de $\Delta_0$ dont les images par les puissances de $\theta$ appartiennent toutes à $\Delta_0^Q$. Puisque $\alpha\not\in\Delta_0^{P_-}$, on peut fixer un entier $k>0$ tel que $\theta^{-k}\alpha\not\in\Delta_0^Q$.

Notons $\tilde{P}''=\tilde{M}''U_{P''}$ le plus petit espace parabolique tel que $Q'\subset P''$. Il est inclus dans $\tilde{P}'$ et l'hypothèse $\phi^{Q'}(H_0(m)-\epsilon'T)\tau_{Q'}^{P'}(H_0(m)-\epsilon'T)=1$ entraîne $\phi^{Q'}(H_0(m)-\epsilon'T)\tau_{Q'}^{P''}(H_0(m)-\epsilon'T)=1$. Appliquons le lemme 3.5(i). On obtient

$$(3)\qquad N^{L'}(H_0(m))>>|(H_0(m)-\epsilon'T)_{L'}^{M''}|.$$

Des hypothèses $m\in M_0(F)^{\geq}$ et $\phi^{Q'}(H_0(m)-\epsilon'T)=1$ résulte une majoration

$$|(H_0(m)-\epsilon'T)_{L'}^{M''}|\geq|H_0(m)^{M''}|-c_3\epsilon'|T|$$

pour une constante $c_3>0$ convenable. Puisque $\alpha\in\Delta_0^{Q'}$, on a $\theta^{-k}\alpha\in\Delta_0^{P''}$. Donc

$$<\theta^{-k}\alpha,H_0(m)^{M''}>=<\theta^{-k}\alpha,H_0(m)>.$$

Puisque $\theta^{-k}\alpha\in\Delta_0^P-\Delta_0^Q$, l'hypothèse $\tau_Q^P(H_0(m)-\epsilon T)=1$ entraîne

$$<\theta^{-k}\alpha,H_0(m)>><\theta^{-k}\alpha,\epsilon T>.$$

On en déduit une majoration $|H_0(m)^{M''}|\geq c_4\epsilon|T|$ pour une constante $c_4>0$ convenable. On obtient

$$|(H_0(m)-\epsilon'T)_{L'}^{M''}|\geq(c_4\epsilon-c_3\epsilon')|T|.$$

En supposant $c_3\epsilon'<c_4\epsilon$, on en déduit

$$|(H_0(m)-\epsilon'T)_{L'}^{M''}|>>|T|.$$

Jointe à (3), cette minoration entraîne la première relation de (2).

Soient maintenant $H', H'' \in \mathcal{C}^{M_-}(H_0(m))$. Parce que $P_-$ est stable par $\theta$, on a $(\theta H')_{M_-} = \theta(H'_{M_-})$. On a aussi $H'_{M_-} = H''_{M_-} = H_{M_-}(m)$. D'où

$$|\theta H' - H''| \geq |(\theta H')_{M_-} - H''_{M_-}| = |\theta H_{M_-}(m) - H_{M_-}(m)| \geq |\theta(H_{M_-}(m)^M) - H_{M_-}(m)^M|.$$

Parce que $\phi^Q(H_0(m-\epsilon T)\tau_Q^P(H_0(m)-\epsilon T) = 1$, on peut écrire $H_0(m)^M = \epsilon T^M + X - Y$, avec $X = \sum_{\beta\in\Delta_0^P-\Delta_0^Q} x_\beta \check{\varpi}_\beta^M$, $Y = \sum_{\beta\in\Delta_0^Q} y_\beta\check{\beta}$, les coefficients $x_\beta$ et $y_\beta$ étant positifs ou nuls. Donc $H_{M_-}(m)^M = \epsilon T^M_{M_-} + X - Y_{M_-}$, avec $Y_{M_-} = \sum_{\beta\in\Delta_0^L-\Delta_0^M} y_\beta\check{\beta}_M$. Remarquons que $T^M_{M_-}$ est fixe par $\theta$ puisque $T$ l'est. D'où

$$|\theta H_{M_-}(m)^M - H_{M_-}(m)^M|^2 = |\theta X - X + Y_{M_-} - \theta(Y_M)|^2$$
$$= |\theta X - X|^2 + |\theta(Y_{M_-}) - Y_{M_-}|^2 + 2(\theta X - X, Y_{M_-} - \theta(Y_{M_-})).$$

Les éléments $X$ et $Y_{M_-}$ sont orthogonaux, et les éléments $\theta X$ et $\theta(Y_{M_-})$ aussi. L'élément $\theta X$ est combinaison linéaire à coefficients positifs ou nuls de $\check{\varpi}_\beta$ pour $\beta \in \Delta_0^P - \Delta_0^{P_-}$. Donc $(\theta X, Y_{M_-}) \geq 0$. Pour une raison analogue, $(X, \theta(Y_{M_-})) \geq 0$. On obtient alors

$$|\theta H_{M_-}(m) - H_{M_-}(m)| \geq |\theta(Y_{M_-}) - Y_{M_-}|.$$

Puisque $\alpha \in \Delta_0^Q$, on a

$$< \alpha, H_0(m) >= \epsilon < \alpha, T > -2y_\alpha - \sum_{\beta\in\Delta_0^Q, \beta\neq\alpha} y_\beta < \alpha, \check{\beta} > \geq c_5\epsilon|T| - 2y_\alpha$$

pour un certain $c_5 > 0$, puisque les $< \alpha, \check{\beta} >$ sont négatifs ou nuls. Puisque $\alpha \in \Delta_0^{Q'}$, on a aussi $< \alpha, H_0(m) >\leq c_1\epsilon'|T|$. D'où

$$y_\alpha \geq \frac{1}{2}(c_5\epsilon - c_1\epsilon')|T|.$$

En supposant $c_1\epsilon' < c_5\epsilon$, on obtient une minoration $y_\alpha >> |T|$. Puisque $\theta^{-k}\alpha \notin \Delta_0^Q$, on a $< \theta^{-k}\varpi_\alpha, Y_{M_-} >= 0$, d'où $< \varpi_\alpha, \theta^k(Y_{M_-}) >= 0$. Alors $< \varpi_\alpha, Y_{M_-} - \theta^k(Y_{M_-}) >= y_\alpha >> |T|$, d'où $|Y_{M_-} - \theta^k(Y_{M_-})| >> |T|$. L'égalité $1 - \theta^k = (1-\theta)(1+\theta+...+\theta^{k-1})$ et le fait que $\theta$ soit une isométrie entraîne $|Y_{M_-} - \theta^k(Y_{M_-})| \leq k|Y_{M_-} - \theta(Y_{M_-})|$. D'où $|Y_{M_-} - \theta(Y_{M_-})| >> |T|$. En rassemblant nos calculs, on obtient la minoration

$$|\theta H' - H''| >> |T|,$$

qui démontre la seconde assertion de (2) et le lemme. □

## 3.10 Une fonction $\mathcal{E}^T$

Pour $m \in M_0(F)$, posons

$$\mathcal{E}^T(m) = \sum_{\tilde{P}=\tilde{M}U_P; \tilde{P}_0\subset\tilde{P}} (-1)^{dim(\mathfrak{a}_{\tilde{M}})-dim(\mathfrak{a}_{\tilde{G}})}\Omega_P(m)\hat{\tau}_{\tilde{P}}(H_0(m)-T)\delta_P(m)D_0^M(m).$$

**Proposition**. *Les fonctions $\mathcal{E}^T(m)$ et $\Omega_G(m)\phi^{\tilde{G}}(H_0(m)-T)D_0^G(m)$ sont équivalentes.*

Preuve. Fixons $\epsilon > 0$ que l'on précisera plus tard. Pour $m \in M_0(F)^{\geq}$, on a l'égalité

$$\sum_{Q; P_0 \subset Q} \phi^Q(H_0(m) - \epsilon T)\tau_Q(H_0(m) - \epsilon T) = 1,$$

cf. 1.3(2). On peut donc fixer $Q$ et montrer que les fonctions $\phi^Q(H_0(m) - \epsilon T)\tau_Q(H_0(m) - \epsilon T)\mathcal{E}^T(m)$ et $\phi^Q(H_0(m) - \epsilon T)\tau_Q(H_0(m) - \epsilon T)\phi^{\tilde{G}}(H_0(m) - T)\Omega_G(m)D_0^G(m)$ sont équivalentes. Soit $\tilde{P}_- = \tilde{M}_- U_{P_-}$ le plus grand espace parabolique tel que $P_0 \subset P \subset Q$. On introduit la fonction $\phi^{\tilde{G}}_{\tilde{P}_-}$, cf. 2.2. On décompose encore le problème en deux. On va prouver :

(1) les fonctions $\phi^{\tilde{G}}_{\tilde{P}_-}(H_0(m) - T)\phi^Q(H_0(m) - \epsilon T)\tau_Q(H_0(m) - \epsilon T)\mathcal{E}^T(m)$ et $\phi^{\tilde{G}}_{\tilde{P}_-}(H_0(m) - T)\phi^Q(H_0(m) - \epsilon T)\tau_Q(H_0(m) - \epsilon T)\phi^{\tilde{G}}(H_0(m) - T)\Omega_G(m)D_0^G(m)$ sont égales sur $M_0(F)^{\geq}$ ;

(2) les fonctions $(1 - \phi^{\tilde{G}}_{\tilde{P}_-}(H_0(m) - T))\phi^Q(H_0(m) - \epsilon T)\tau_Q(H_0(m) - \epsilon T)\mathcal{E}^T(m)$ et $(1 - \phi^{\tilde{G}}_{\tilde{P}_-}(H_0(m) - T))\phi^Q(H_0(m) - \epsilon T)\tau_Q(H_0(m) - \epsilon T)\phi^{\tilde{G}}(H_0(m) - T)\Omega_G(m)D_0^G(m)$ sont toutes deux équivalentes à 0.

Traitons (1). On se limite à considérer des $m \in M_0(F)^{\geq}$ tels que $\phi^{\tilde{G}}_{\tilde{P}_-}(H_0(m) - T)\phi^Q(H_0(m) - \epsilon T)\tau_Q(H_0(m) - \epsilon T) = 1$. Pour $\alpha \in \Delta_0^{P_-}$, on a une égalité

$$\varpi_\alpha = \varpi_\alpha^{M_-} + \sum_{\beta \in \Delta_0^G - \Delta_0^{P_-}} x_\beta \varpi_\beta.$$

Parce que les poids fondamentaux forment une base aiguë de $\mathcal{A}_0^*$, les coefficients $x_\beta$ sont positifs ou nuls. On en déduit une formule analogue

$$\varpi_{\tilde{\alpha}} = \varpi_{\tilde{\alpha}}^{M_-} + \sum_{\tilde{\beta} \in \Delta_0^{\tilde{G}} - \Delta_0^{\tilde{P}_-}} x_{\tilde{\beta}} \varpi_{\tilde{\beta}}.$$

Puisque $\phi^{\tilde{G}}_{\tilde{P}_-}(H_0(m) - T) = 1$, on a $< \varpi_{\tilde{\beta}}, H_0(m) - T > \leq 0$ pour tous les $\tilde{\beta}$ intervenant, donc

$$(3) \qquad < \varpi_{\tilde{\alpha}}, H_0(m) - T > \leq < \varpi_{\tilde{\alpha}}^{M_-}, H_0(m) - T > .$$

Les hypothèses $m \in M_0(F)^{\geq}$ et $\phi^Q(H_0(m) - \epsilon T) = 1$ entraînent une majoration $|H_0(m)^L| \leq c\epsilon|T|$ pour un certain $c > 0$, a fortiori $|H_0(m)^{M_-}| \leq c\epsilon|T|$. D'où $| < \varpi_{\tilde{\alpha}}^{M_-}, H_0(m) > | \leq c_{\tilde{\alpha}}\epsilon|T|$ pour un certain $c_{\tilde{\alpha}} > 0$. On précise $\epsilon$ en imposant que pour tout $T$, on ait l'inégalité $c_{\tilde{\alpha}}\epsilon|T| \leq < \varpi_{\tilde{\alpha}}^{M_-}, T >$ ( pour tout $\tilde{\alpha}$). Grâce à (3), cela entraîne

$$< \varpi_{\tilde{\alpha}}, H_0(m) - T > \leq 0.$$

On avait supposé $\tilde{\alpha} \in \Delta_0^{\tilde{P}_-}$, mais cette relation est aussi vraie pour $\tilde{\alpha} \in \Delta_0^{\tilde{G}} - \Delta_0^{\tilde{P}_-}$ grâce à l'hypothèse $\phi^{\tilde{G}}_{\tilde{P}_-}(H_0(m) - T) = 1$. Mais alors on a $\hat{\tau}_{\tilde{P}}(H_0(m) - T) = 0$ pour tout $\tilde{P}$ propre. Dans la somme définissant $\mathcal{E}^T(m)$, il ne reste que la contribution de $\tilde{P} = \tilde{G}$, qui est simplement $\Omega_G(m)D_0^G(m)$. Comme on vient de le voir, on a $\phi^{\tilde{G}}(H_0(m) - T) = 1$ donc $\Omega_G(m) = \phi^{\tilde{G}}(H_0(m) - T)\Omega_G(m)$ et la conclusion de (1) s'ensuit.

Traitons (2). On peut supposer $P_- \neq G$, sinon $1 - \phi^{\tilde{G}}_{\tilde{P}_-}(H_0(m) - T) = 0$. Pour la deuxième fonction, l'assertion est évidente car $(1 - \phi^{\tilde{G}}_{\tilde{P}_-}(H_0(m) - T))\phi^{\tilde{G}}(H_0(m) - T) = 0$. Pour tout $\tilde{\alpha} \in \Delta_0^{\tilde{G}} - \Delta_0^{\tilde{P}_-}$, notons simplement $\hat{\tau}_{\tilde{\alpha}}$ la fonction caractéristique de l'ensemble des $H \in \mathcal{A}_0$ tels que $\varpi_{\tilde{\alpha}}(H) > 0$. Le support de $1 - \phi^{\tilde{G}}_{\tilde{P}_-}(H_0(m) - T)$ est contenu dans la réunion des supports des $\hat{\tau}_{\tilde{\alpha}}(H_0(m) - T)$ quand $\tilde{\alpha}$ décrit $\Delta_0^{\tilde{G}} - \Delta_0^{\tilde{P}_-}$. On peut fixer $\tilde{\alpha}$ dans cet ensemble et se contenter de prouver que la fonction

$$\hat{\tau}_{\tilde{\alpha}}(H_0(m) - T)\phi^Q(H_0(m) - \epsilon T)\tau_Q(H_0(m) - \epsilon T)\mathcal{E}^T(m)$$

est équivalente à 0. Dans la somme définissant $\mathcal{E}^T(m)$, on regroupe les $\tilde{P}$ en paires $(\tilde{P}', \tilde{P})$ de sorte que $\tilde{\Delta}_0^P = \tilde{\Delta}_0^{P'} \sqcup \{\tilde{\alpha}\}$. Il nous suffit de prouver que, pour une telle paire,

(4) la fonction

$$\hat{\tau}_{\tilde{\alpha}}(H_0(m) - T)\phi^Q(H_0(m) - \epsilon T)\tau_Q(H_0(m) - \epsilon T)$$

$$\Big(\Omega_P(m)\hat{\tau}_{\tilde{P}}(H_0(m) - T)\delta_P(m)D_0^M(m) - \Omega_{P'}(m)\hat{\tau}_{\tilde{P}'}(H_0(m) - T)\delta_{P'}(m)D_0^{M'}(m)\Big)$$

est équivalente à 0.

On fixe $\epsilon' > 0$ que l'on précisera par la suite. En utilisant le découpage déjà maintes fois utilisé, on peut fixer un sous-groupe parabolique standard $Q' \subset P$ et montrer que la fonction (4) multipliée par $\phi^{Q'}(H_0(m) - \epsilon' T)\tau^P_{Q'}(H_0(m) - \epsilon' T)$ est équivalente à 0. Par hypothèse, $\tilde{\alpha} \not\in \Delta_0^{\tilde{P}_-}$. Par définition de $\tilde{P}_-$, il existe donc une racine $\alpha \in \Delta_0 - \Delta_0^Q$ telle que sa restriction à $\mathcal{A}_{\tilde{M}_0}$ soit $\tilde{\alpha}$. Fixons une telle racine. L'hypothèse $\phi^Q(H_0(m) - \epsilon T)\tau_Q(H_0(m) - \epsilon T) = 1$ entraîne une minoration $< \alpha, H_0(m) >>> \epsilon|T|$. Si $\alpha \in \Delta_0^{Q'}$, l'hypothèse $\phi^{Q'}(H_0(m) - \epsilon' T) = 1$ entraîne une majoration $< \alpha, H_0(m) ><< \epsilon'|T|$. On impose que $\epsilon'$ soit assez petit pour que ces deux inégalités soient contradictoires. Alors $\alpha \not\in \Delta_0^{Q'}$. Notons $\tilde{P}'_- = \tilde{M}'_- U_{P'_-}$ le plus grand espace parabolique standard tel que $P'_- \subset Q'$. Alors $\tilde{\alpha} \not\in \Delta^{\tilde{P}'_-}$. Cette relation, jointe aux inclusions $P'_- \subset Q' \subset P$ et à l'égalité $\Delta^{\tilde{P}} = \Delta^{\tilde{P}'} \sqcup \{\tilde{\alpha}\}$, entraîne que $P'_- \subset P'$. On peut alors appliquer le lemme 3.9 : les fonctions

$$\phi^{Q'}(H_0(m) - \epsilon' T)\tau^P_{Q'}(H_0(m) - \epsilon' T)\Omega_P(m)\delta_P(m)D_0^M(m)$$

et

$$\phi^{Q'}(H_0(m) - \epsilon' T)\tau^P_{Q'}(H_0(m) - \epsilon' T)\Omega_{P'}(m)\delta_{P'}(m)D_0^{M'}(m)$$

sont toutes deux équivalentes à

$$\phi^{Q'}(H_0(m) - \epsilon' T)\tau^P_{Q'}(H_0(m) - \epsilon' T)\Omega_{P'_-}(m)\delta_{P'_-}(m)D_0^{M'_-}(m).$$

Leur différence est donc équivalente à 0. Par ailleurs, on a l'égalité

$$\hat{\tau}_{\tilde{\alpha}}(H_0(m) - T)\hat{\tau}_{\tilde{P}}(H_0(m) - T) = \hat{\tau}_{\tilde{\alpha}}(H_0(m) - T)\hat{\tau}_{\tilde{P}'}(H_0(m) - T)$$

d'après l'hypothèse sur $P$ et $P'$. Donc la fonction (4), multipliée par $\phi^{Q'}(H_0(m) - \epsilon' T)\tau^P_{Q'}(H_0(m) - \epsilon' T)$, est égale à la différence des deux fonctions ci-dessus, multipiée par une fonction bornée. Cela prouve (4) et la proposition. $\square$

## 3.11 Contrôle de la partie centrale

On sait que $\mathcal{A}_{A_{G,F}}$ est un sous-groupe d'indice fini dans $\mathcal{A}_{G,F}$ (ces groupes sont tous deux égaux à $\mathcal{A}_G$ si $F$ est archimédien). Fixons un ensemble de représentants $\mathbf{b}$ du groupe quotient. Pour tout sous-ensemble $\mathcal{X} \subset G(F)$, notons $\mathcal{X}^{\mathbf{b}}$ l'ensemble des $g \in X$ tels que $H_G(g) \in \mathbf{b}$. Notons $H_G^{\tilde{G}}$ la composée de $H_G$ et de la projection sur l'orthogonal de $\mathcal{A}_{\tilde{G}}$.

**Lemme**. *Soient $Q$ un sous-groupe parabolique standard, $w \in W^G(L|S)$ et $w' \in W^G(L|S')$. Il existe un entier $D$ et, quel que soit le réel $r$, il existe $c > 0$ tel que l'on ait la majoration*

$$|\omega_{Q,w,w'}(am)|\delta_Q(am)D^L(am) \leq c(1 + |H_0(m)|)^D(1 + |H_G^{\tilde{G}}(a)|)^{-r}$$

*pour tout $m \in M_0(F)^{\geq,\mathbf{b}}$ et tout $a \in A_{\tilde{G}}(F)\backslash A_G(F)$.*

Preuve. Il résulte des définitions que, pour tout $\lambda \in i\mathcal{A}^*_{M_{disc},F}$ et tous $k, k' \in K$, on a l'égalité

$$\begin{aligned}\omega_{Q,w,w'}(am, k, k', \lambda) &= e^{-<\lambda',H_G(a)>+<\lambda,H_G(a)>}\omega_{Q,w,w'}(m, k, k', \lambda)\\ &= e^{<\lambda,H_G(a)-\theta H_G(a)>}\omega_{Q,w,w'}(m, k, k', \lambda).\end{aligned}$$

Alors

$$\omega_{Q,w,w'}(am) = \int_{K\times K}\int_{i\mathcal{A}^*_{M_{disc}}/i(\mathcal{A}^*_G+\mathcal{A}^\vee_{M_{disc},F})} \omega_{Q,w,w'}(m, k, k', \lambda)m^G(\sigma_\lambda)$$
$$B'(\lambda, a)\omega(k^{-1}amk')\, d\lambda\, dk\, dk',$$

où

$$B'(\lambda, a) = \int_{i\mathcal{A}^*_{G,F}} B(\lambda + \mu)e^{<\lambda+\mu,H_G(a)-\theta H_G(a)>}\, d\mu.$$

On peut remplacer l'ensemble d'intégration en $\lambda$ par un domaine fondamental $\mathcal{X}$ dans $i\mathcal{A}^*_{M_{disc}}$. Alors $B'(\lambda, a)$ est de Schwartz en les deux variables. On remarque que les fonctions $|H_G(a) - \theta H_G(a)|$ et $|H_G^{\tilde{G}}(a)|$ sont équivalentes. On peut alors trouver une fonction $B''$ de Schwartz sur $\mathcal{X}$, à valeurs positives, de sorte que l'on ait l'inégalité $|B'(\lambda, a)| \leq B''(\lambda)(1 + |H_G^{\tilde{G}}(a)|)^{-r}$. Alors $\omega_{Q,w,w'}(am)$ est majorée par le produit de $(1 + |H_G^{\tilde{G}}(a)|)^{-r}$ et d'une fonction qui a essentiellement la même forme que $\omega_{Q,w,w'}(m)$, sauf que l'on a supprimé l'intégration centrale. Cette dernière fonction est essentiellement majorée par $\delta_Q(m)^{-1}\Xi^L(m)^2$ par le même argument qu'au lemme 3.6. On en déduit l'énoncé. □

## 3.12 Un lemme de convergence

Soient $Q = LU_Q \subset R$ deux sous-groupes paraboliques standard et soient $w \in W^G(L|S)$ et $w' \in W^G(L|S')$. On suppose $s_Q^R(w, w') \neq 0$. Il existe donc un unique espace parabolique $\tilde{P} = \tilde{M}U_P$ tel que $Q \subset P \subset R$ et $(w, w') \in \mathcal{W}_Q^P$. Pour $m \in M_0(F)$, on pose

$$E^T_{Q,R,w,w'}(m) = \phi^Q(H_0(m) - T)\tilde{\sigma}_Q^R(H_0(m) - T)\delta_Q(m)D_0^L(m)\omega_{Q,w,w'}(m).$$

**Lemme**. *Sous ces hypothèses, l'intégrale*

$$\int_{A_{\tilde{G}}(F)\backslash M_0(F)^{\geq,Q}} |E^T_{Q,R,w,w'}(m)|\, dm$$

*est convergente.*

Preuve. Le lemme 3.5(iv) nous fournit une majoration

$$|(H_0(m)-T)_L^{\tilde{G}}| << N^L_{w,w'}(H_0(m))$$

pour tout $T$ et tout $m \in M_0(F)^{\geq,Q}$ tel que $\phi^Q(H_0(m)-T)\tilde{\sigma}_Q^R(H_0(m)-T)=1$. On a $(H_0(m)-T)_L^{\tilde{G}} = H_0^{\tilde{G}}(m) - H_0^L(m) - T_L^{\tilde{G}}$. Les hypothèses $\phi^Q(H_0(m)-T)=1$ et $m \in M_0(F)^{\geq,Q}$ entraînent une majoration $|H_0^L(m)| << |T|$. D'où

$$|H_0^{\tilde{G}}(m)| << |T| + |(H_0(m)-T)_L^{\tilde{G}}|,$$

puis

$$(1) \qquad |H_0^{\tilde{G}}(m)| << |T| + N^L_{w,w'}(H_0(m)).$$

Remarquons que, si l'on considère $T$ comme fixé (comme on le peut ici), la majoration (1) entraîne plus simplement

$$|H_0^{\tilde{G}}(m)| << N^L_{w,w'}(H_0(m))$$

dans le domaine considéré. En utilisant cette majoration, le lemme 3.6 et les majorations familières concernant les fonctions $D_0^L$ et $\Xi^L$, on voit que l'intégrale de l'énoncé est essentiellement majorée par

$$\int_{A_{\tilde{G}}F)\backslash M_0(F)^{\geq,Q}} (1+|H_0^{\tilde{G}}(m)|)^{-r}\, dm$$

pour tout réel $r$. Cette intégrale est convergente, d'où le lemme. □

## 3.13 Comparaison de deux intégrales

On conserve les hypothèses du paragraphe précédent. Soit $\nu$ un réel strictement positif. Notons $\mathbf{1}_{\nu T}$ la fonction caractéristique de l'ensemble des $m \in M_0(F)$ tels que $|H_0^{\tilde{G}}(m)| \leq \nu|T|$.

**Lemme**. *Sous ces hypothèses, si $\nu$ est assez grand, la différence entre les deux intégrales*

$$\int_{A_{\tilde{G}}(F)\backslash M_0(F)^{\geq,Q}} E^T_{Q,R,w,w'}(m)\, dm$$

*et*

$$\int_{A_{\tilde{G}}(F)\backslash M_0(F)^{\geq}} E^T_{Q,R,w,w'}(m)\mathbf{1}_{\nu T}(m)\, dm$$

*est essentiellement majorée par $|T|^{-r}$ pour tout réel $r$.*

Preuve. On peut considérer que le domaine d'intégration de la seconde intégrale est l'ensemble des $m \in A_{\tilde{G}}(F)\backslash M_0(F)^{\geq}$ tels que $\mathbf{1}_{\nu T}(m)=1$. Ce domaine est contenu dans le domaine d'intégration $A_{\tilde{G}}(F)\backslash M_0(F)^{\geq,Q}$ de la première intégrale. Notons $\mathcal{D}^T$ le complémentaire du premier domaine dans le second. On va prouver plus précisément :

(1) pour $\nu$ assez grand, on a pour tout réel $r$ une majoration

$$\int_{\mathcal{D}^T} |E^T_{Q,R,w,w'}(m)|\, dm \,<<|T|^{-r}.$$

L'ensemble $\mathcal{D}^T$ est réunion disjointe des deux sous-ensembles
$\mathcal{D}^T_1 = A_{\tilde{G}}(F)\backslash\{m \in M_0(F)^{\geq,Q}; \mathbf{1}_{\nu T}(m) = 0\}$ ;
$\mathcal{D}^T_2 = A_{\tilde{G}}(F)\backslash\{m \in M_0(F)^{\geq,Q} - M_0(F)^{\geq}; \mathbf{1}_{\nu T}(m) = 1\}$.

Compte tenu de la définition de $E^T_{Q,R,w,w'}(m)$, on peut ajouter la condition $\phi^Q(H_0(m)-T)\tilde{\sigma}^R_Q(H_0(m) - T) = 1$. Sur $\mathcal{D}^T_1$, on utilise la relation (1) du paragraphe précédent, que l'on écrit plus précisément

$$|H^{\tilde{G}}_0(m)| \leq c_1(|T| + N^L_{w,w'}(H_0(m))).$$

Jointe à la condition $\mathbf{1}_{\nu T}(m) = 0$, elle nous dit que

$$(\nu - c_1)|T| \leq c_1N^L_{w,w'}(H_0(m))$$

et

$$(1 - \frac{c_1}{\nu})|H^{\tilde{G}}_0(m)| \leq c_1N^L_{w,w'}(H_0(m)).$$

On suppose $\nu > c_1$. On en déduit une majoration

$$|H^{\tilde{G}}_0(m)| + |T| << N^L_{w,w'}(H_0(m)).$$

En utilisant le lemme 3.6 et les majorations habituelles des fonctions $D^L_0$ et $\Xi^L$, on voit que l'intégrale

$$\int_{\mathcal{D}^T_1} |E^T_{Q,R,w,w'}(m)|\, dm$$

est essentiellement majorée par

$$|T|^{-r}\int_{A_{\tilde{G}}(F)\backslash M_0(F)} (1 + |H^{\tilde{G}}_0(m)|)^{-r}\, dm$$

pour tout réel $r$. Cette dernière intégrale est convergente, d'où la majoration

$$\int_{\mathcal{D}^T_1} |E^T_{Q,R,w,w'}(m)|\, dm << |T|^{-r}.$$

Traitons maintenant l'intégrale sur $\mathcal{D}^T_2$. Le lemme 3.5(iv) nous fournit la majoration

$$|(H_0(m) - T)^{\tilde{G}}_L| << N^L_{w,w'}(H_0(m))$$

pour tout $T$ et tout $m \in M_0(F)^{\geq,Q}$ tel que $\phi^Q(H_0(m)-T)\tilde{\sigma}^R_Q(H_0(m)-T) = 1$. Supposons de plus $m \notin M_0(F)^{\geq}$. Il existe donc $\alpha \in \Delta_0$ tel que $< \alpha, H_0(m) >\leq 0$. Nécessairement, $\alpha \notin \Delta^Q_0$ (puisque $m \in M_0(F)^{\geq,Q}$). On a

$$< \alpha, (H_0(m) - T)^{\tilde{G}}_L >=< \alpha, H_0(m) - T > + < \alpha, (T - H_0(m))^L > .$$

Le premier terme est inférieur ou égal à $- < \alpha, T >$. Le second est négatif ou nul : l'hypothèse $\phi^Q(H_0(m) - T) = 1$ entraîne que $(T - H_0(m))^L$ est combinaison linéaire à coefficients positifs ou nuls de $\check{\beta}$ pour $\beta \in \Delta^Q_0$ et on a $< \alpha, \check{\beta} >\leq 0$ pour tout tel $\beta$. Donc

$$< \alpha, (H_0(m) - T)^{\tilde{G}}_L >\leq - < \alpha, T > .$$

A fortiori $|(H_0(m)-T)_L^{\tilde{G}}| >> |T|$, ce qui prouve la majoration

$$|T| << N_{w,w'}^L(H_0(m))$$

pour tout $m \in M_0(F)^{\geq,Q} - M_0(F)^{\geq}$ tel que $\phi^Q(H_0(m)-T)\tilde{\sigma}_Q^R(H_0(m)-T) = 1$. En utilisant encore le lemme 3.6 et les majorations habituelles des fonctions $D_0^L$ et $\Xi^L$, on voit que l'intégrale

$$\int_{\mathcal{D}_2^T} |E_{Q,R,w,w'}^T(m)|\, dm$$

est essentiellement majorée par

$$|T|^{-r} \int_{A_{\tilde{G}}(F)\backslash M_0(F)} (1+|H_0^{\tilde{G}}(m)|)^D \mathbf{1}_{\nu T}(m)\, dm$$

pour un certain entier $D$ et pour tout réel $r$. La dernière intégrale est convergente et essentiellement bornée par $|T|^{D'}$ pour un certain entier $D'$. On en déduit

$$\int_{\mathcal{D}_2^T} |E_{Q,R,w,w'}^T(m)|\, dm << |T|^{-r}$$

pour tout réel $r$. Cela prouve (1) et le lemme. $\square$

## 3.14 Un lemme d'équivalence

Posons

$$E^T(m) = \sum_{Q,R;P_0\subset Q\subset R}\ \sum_{w\in W^G(L|S),w'\in W^G(L|S')} s_Q^R(w,w')E_{Q,R,w,w'}^T(m)$$

$$= \sum_{Q,R;P_0\subset Q\subset R}\ \sum_{w\in W^G(L|S),w'\in W^G(L|S')} s_Q^R(w,w')\phi^Q(H_0(m)-T)\tilde{\sigma}_Q^R(H_0(m)-T)$$

$$\delta_Q(m)D_0^L(m)\omega_{Q,w,w'}(m).$$

**Lemme**. *Les fonctions $E^T(m)$ et $\Omega_G(m)\phi^{\tilde{G}}(H_0(m)-T)D_0^G(m)$ sont équivalentes.*

Preuve. Dans la somme définissant $\mathcal{E}^T(m)$, on peut glisser une sous-somme

$$\sum_{Q;P_0\subset Q\subset P} \phi^Q(H_0(m)-T)\tau_Q^P(H_0(m)-T)$$

puisque celle-ci vaut 1. En utilisant le lemme 3.7 (i) et (ii), on peut alors, à équivalence près, remplacer la fonction $\Omega_P(m)\delta_P(m)D_0^M(m)$ par

$$\sum_{(w,w')\in\mathcal{W}_Q^P} \omega_{Q,w,w'}(m)\delta_Q(m)D_0^L(m).$$

On a aussi l'égalité

$$\tau_Q^P(H_0(m)-T)\hat{\tau}_{\tilde{P}}(H_0(m)-T) = \sum_{R;P\subset R} \tilde{\sigma}_Q^R(H_0(m)-T),$$

cf. 2.2(1). A ce point, on a montré que $\mathcal{E}^T(m)$ est équivalente à

$$\sum_{Q,R;P_0\subset Q\subset R}\sum_{w\in W^G(L|S),w'\in W^G(L|S')}\phi^Q(H_0(m)-T)\tilde{\sigma}_Q^R(H_0(m)-T)$$

$$\delta_Q(m)D_0^L(m)\omega_{Q,w,w'}(m)\sum_{\tilde{P};Q\subset P\subset R,(w,w')\in\mathcal{W}_Q^P}(-1)^{dim(\mathfrak{a}_{\tilde{P}})-dim(\mathfrak{a}_{\tilde{G}})}.$$

La dernière somme est égale par définition à $s_Q^R(w,w')$, donc l'expression ci-dessus est égale à $E^T(m)$. Donc $E^T(m)$ est équivalente à $\mathcal{E}^T(m)$. La proposition 3.10 nous dit que $\mathcal{E}^T(m)$ est équivalente à la deuxième fonction de l'énoncé. $\square$

## 3.15 Preuve de la proposition 3.4

Que l'expression définissant $j_\star^T$ soit absolument convergente résulte du lemme 3.12. Fixons un réel $\nu>0$ que l'on précisera plus tard. Introduisons l'expression

$$j_1^T=\int_{A_{\tilde{G}}(F)\backslash M_0(F)^{\geq}}E^T(m)\mathbf{1}_{\nu T}(m)\,dm.$$

Elle aussi est absolument convergente. Le lemme 3.13 nous dit que

$$lim_{T\to\infty}j_\star^T-j_1^T=0.$$

Pour $m\in M_0(F)^{\geq}$, posons

$$\psi(m)=\Omega_G(m)D_0^G(m)\tilde{\kappa}^T(m)-E^T(m)\mathbf{1}_{\nu T}(m).$$

Remarquons que toute intégrale sur $A_{\tilde{G}}(F)\backslash M_0(F)^{\geq}$ se décompose en produit d'une intégrale sur $M_0(F)^{\geq,\mathbf{b}}$ et d'une intégrale sur $A_{\tilde{G}}(F)\backslash A_G(F)$, cf. 3.11 pour la définition de $M_0(F)^{\geq,\mathbf{b}}$. On décompose $j^T-j_1^T$ en $j_2^T+j_3^T$, où

$$j_2^T=\int_{M_0(F)^{\geq,\mathbf{b}}}\int_{a\in A_{\tilde{G}}(F)\backslash A_G(F);|H_G^{\tilde{G}}(a)|>|T|}\psi(am)\,da\,dm,$$

$$j_3^T=\int_{M_0(F)^{\geq,\mathbf{b}}}\int_{a\in A_{\tilde{G}}(F)\backslash A_G(F);|H_G^{\tilde{G}}(a)|\leq|T|}\psi(am)\,da\,dm.$$

Dans la première, on utilise le lemme 3.11. On peut l'appliquer à chaque fonction intervenant dans la définition de $E^T(m)$, ainsi qu'à la fonction $\Omega_G(m)D_0^G(m)$ qui en est un cas particulier. Ce lemme nous fournit une majoration

$$|\psi(am)|<<(1+|H_0(m)|)^D(1+|H_G^{\tilde{G}}(a)|)^{-r}$$

pour un certain entier $D$ et pour tout réel $r$. L'intégrale en $a$ est essentiellement majorée par $|T|^{-r}$ pour tout réel $r$. L'intégrale en $m$ porte sur un domaine où $|H_0(m)|<<|T|$ car une telle inégalité est vérifiée sur l'intersection de $M_0(F)^{\geq,\mathbf{b}}$ et des supports des fonctions $\tilde{\kappa}^T(am)$ ou $\mathbf{1}_{\nu T}(am)$. L'intégrale en $m$ est donc essentiellement bornée par $|T|^{D'}$ pour un certain entier $D'$. Il en résulte que $lim_{T\to\infty}j_2^T=0$. Considérons $j_3^T$. Si $\nu$ est assez grand, les conditions $m\in M_0(F)^{\geq,\mathbf{b}}$, $|H_G^{\tilde{G}}(a)|\leq|T|$ et $\tilde{\kappa}^T(am)=1$ impliquent $|H_0(am)^{\tilde{G}}|\leq\nu|T|$. On ne change alors rien en multipliant la fonction $\Omega_G(am)D_0^G(am)\tilde{\kappa}^T(am)$ par $\mathbf{1}_{\nu T}(am)$.

Pour $m \in M_0(F)^{\geq}$, on a $\tilde{\kappa}^T(m) = \phi^{\tilde{G}}(H_0(m) - T)$. Le lemme 3.14 nous fournit pour tout $r$ une majoration
$$|\psi(am)| << |T|^{-r}$$
sur le domaine d'intégration de $j_3^T$, pour un certain entier $D$ et pour tout $r$. De nouveau, l'intégrale de cette fonction sur le domaine $\mathbf{1}_{\nu T}(am) = 1$ est majorée par $|T|^{-r}$ pour tout $r$. Donc $lim_{T\to\infty} j_3^T = 0$. Cela achève la preuve. $\square$

## 3.16 Définition de $(G, M)$-familles

Posons $M'_{disc} = \theta^{-1}(M_{disc})$. Soit $t \in W^G(M_{disc}|M'_{disc})$, c'est-à-dire que $t \in W^G/W^{M'_{disc}}$ et $t(M'_{disc}) = M_{disc}$. Soit $\nu \in [t\sigma', \omega\sigma]$. On fixe un automorphisme unitaire $A_\nu$ de $V_\sigma$ tel que $(t\sigma')(x) \circ A_\nu = \omega(x) A_\nu \circ \sigma_{-\nu}(x)$ pour tout $x \in M_{disc}(F)$. Par fonctorialité, il définit des homomorphismes entre différentes représentations induites. Notons $\underline{\omega}$ l'opérateur qui, à une fonction $\varphi$ sur $G(F)$, associe la fonction $g \mapsto \omega(g)\varphi(g)$. Lui-aussi définit des homomorphismes entre certaines représentations induites. Pour $\Lambda \in i\mathcal{A}^*_{M_{disc},F}$, introduisons l'opérateur
$$A(t, \nu; \Lambda) : \pi'_{t^{-1}(\Lambda+\nu)} = Ind_{S'}^G(\sigma'_{t^{-1}(\lambda+\nu)}) \to \pi_\Lambda = Ind_S^G(\sigma_\Lambda)$$
défini par
$$A(t, \nu; \Lambda) = R_{S|t(S')}(\sigma_\Lambda) \circ \gamma(t) \circ A_\nu^{-1} \underline{\omega}^{-1}.$$
Il vérifie la relation d'entrelacement $\omega(g)\pi_\Lambda(g) \circ A(t, \nu; \Lambda) = A(t, \nu; \Lambda) \circ \pi'_{t^{-1}(\Lambda+\nu)}(g)$.

Pour $S'' \in \mathcal{P}(M_{disc})$, on définit la fonction $(\lambda, \Lambda) \mapsto \phi(t, \nu; \lambda, \Lambda, S'')$ des deux variables $\lambda, \Lambda \in i\mathcal{A}^*_{M_{disc},F}$ par
$$\phi(t, \nu; \lambda, \Lambda, S'') = (A(t, \nu; t\lambda' - \nu)v', J_{\bar{S}''|S}(\sigma_{t\lambda'-\nu})^{-1} \circ J_{\bar{S}''|S}(\sigma_{t\lambda'-\nu+\Lambda})u)$$
$$(J_{S''|S}(\sigma_{t\lambda'-\nu})^{-1} \circ J_{S''|S}(\sigma_{t\lambda'-\nu+\Lambda})v, A(t, \nu; t\lambda' - \nu)u').$$
Pour $\lambda$ fixé, la famille $(\phi(t, \nu; \lambda, \Lambda, S''))_{S''\in\mathcal{P}(M_{disc})}$ de fonctions en $\Lambda$ est presque une $(G, M_{disc})$-famille et même presque une $(G, M_{disc})$-famille $p$-adique dans le cas où $F$ est non-archimédien. "Presque" parce que les fonctions ne sont pas forcément $C^\infty$ : il peut y avoir des singularités. Etudions cette question de régularité. En convertissant les opérateurs d'entrelacement en opérateurs normalisés, on peut récrire la définition de $\phi(t, \nu; \lambda, \Lambda, S'')$ sous la forme
$$\phi(t, \nu; \lambda, \Lambda, S'') = r_{\bar{S}''|S''}(\sigma_{t\lambda'-\nu})^{-1} r_{\bar{S}''|S''}(\sigma_{t\lambda'-\nu+\Lambda})$$
$$(A(t, \nu; t\lambda' - \nu)v', R_{\bar{S}''|S}(\sigma_{t\lambda'-\nu})^{-1} \circ R_{\bar{S}''|S}(\sigma_{t\lambda'-\nu+\Lambda})u)$$
$$(R_{S''|S}(\sigma_{t\lambda'-\nu})^{-1} \circ R_{S''|S}(\sigma_{t\lambda'-\nu+\Lambda})v, A(t, \nu; t\lambda' - \nu)u').$$
Posons
$$r_{S'',reg}(\sigma_\lambda) = r_{\bar{S}''|S''}(\sigma_\lambda) r_{\bar{S}|S}(\sigma_\lambda)^{-1}.$$
On peut écrire
$$\phi(t, \nu; \lambda, \Lambda, S'') = r_{\bar{S}|S}(\sigma_{t\lambda'-\nu})^{-1} r_{\bar{S}|S}(\sigma_{t\lambda'-\nu+\Lambda}) \phi_{reg}(t, \nu; \lambda, \Lambda, S''),$$
où
$$\phi_{reg}(t, \nu; \lambda, \Lambda, S'') = r_{S'',reg}(\sigma_{t\lambda'-\nu})^{-1} r_{S'',reg}(\sigma_{t\lambda'-\nu+\Lambda})$$

$$(A(t,\nu;t\lambda'-\nu)v', R_{\bar{S}''|S}(\sigma_{t\lambda'-\nu})^{-1}\circ R_{\bar{S}''|S}(\sigma_{t\lambda'-\nu+\Lambda})u)$$

$$(R_{S''|S}(\sigma_{t\lambda'-\nu})^{-1}\circ R_{S''|S}(\sigma_{t\lambda'-\nu+\Lambda})v, A(t,\nu;t\lambda'-\nu)u').$$

Grâce à 1.10(5), la fonction $\phi_{reg}(t,\nu;\lambda,\Lambda,S'')$ est régulière en $\lambda$ et $\Lambda$. La famille $(\phi_{reg}(t,\nu;\lambda,\Lambda,S''))_{S''\in\mathcal{P}(M_{disc})}$ est vraiment une $(G,M)$-famille, $p$-adique dans le cas où $F$ est non-archimédien. Toutes les singularités de la famille de départ se concentrent dans la fonction $r_{\bar{S}|S}(\sigma_{t\lambda'-\nu})^{-1}r_{\bar{S}|S}(\sigma_{t\lambda'-\nu+\Lambda})$ en facteur.

Soit $Q=LU_Q\in\mathcal{F}(M_{disc})$. On déduit de la famille $(\phi(t,\nu;\lambda,\Lambda,S''))_{S''\in\mathcal{P}(M_{disc})}$ une famille $(\phi(t,\nu;\lambda,\Lambda,S''^L))_{S''^L\in\mathcal{P}^L(M_{disc})}$, qui n'est autre que $(\phi(t,\nu;\lambda,\Lambda,S''))_{S''\in\mathcal{P}(M_{disc}),S''\subset Q}$.

Pour $X\in\mathcal{A}_{L,F}$ et $S''\in\mathcal{P}(M_{disc})$ tel que $S''\subset Q$, on a défini en 1.6 la fonction

$$\epsilon_{S''}^{Q,T[S'']}(X;\Lambda)=\int_{\mathcal{A}^L_{M_{disc},F}(X)}\phi^L_{S''}(Y-T[S''])e^{<\Lambda,Y>}\,dY$$

($\phi^L_{S''}$ est la fonction combinatoire de 1.3, qui n'a rien à voir avec les fonctions de la $(G,M_{disc})$-famille). On pose

$$\phi^{Q,T}_{M_{disc}}(t,\nu,X;\lambda,\Lambda)=\sum_{S''\in\mathcal{P}(M_{disc}),S''\subset Q}\phi(t,\nu;\lambda,\Lambda,S'')\epsilon_{S''}^{Q,T[S'']}(X;\Lambda).$$

On définit de même $\phi^{Q,T}_{reg,M_{disc}}(t,\nu,X;\lambda,\Lambda)$. Rappelons que l'on a posé $\lambda'=\theta^{-1}\lambda$. On pose

$$\epsilon(t,\nu;\lambda)=r_{\bar{S}|S}(\sigma_\lambda)r_{\bar{S}|S}(\sigma_{t\lambda'-\nu})^{-1}.$$

**Lemme**. *(i) Pour $\lambda$ en position générale, la fonction $\Lambda\mapsto\phi^{Q,T}_{M_{disc}}(t,\nu,X;\lambda,\Lambda)$ est régulière en $\Lambda=\lambda-t\lambda'+\nu$.*

*(ii) Les fonctions*

$$\lambda\mapsto\phi^{Q,T}_{M_{disc}}(t,\nu,X;\lambda,\lambda-t\lambda'+\nu),$$

$$\lambda\mapsto\phi^{Q,T}_{reg,M_{disc}}(t,\nu,X;\lambda,\lambda-t\lambda'+\nu),$$

$$\lambda\mapsto\epsilon(t,\nu;\lambda)$$

*sont $C^\infty$ sur $i\mathcal{A}^*_{M,F}$. Si $F$ est archimédien, toutes leurs dérivées sont à croissance lente.*

*(iii) On a l'égalité*

$$\phi^{Q,T}_{M_{disc}}(t,\nu,X;\lambda,\lambda-t\lambda'+\nu)=\epsilon(t,\nu;\lambda)\phi^{Q,T}_{reg,M_{disc}}(t,\nu,X;\lambda,\lambda-t\lambda'+\nu).$$

*(iv) Comme fonction de $X$, $\phi^{Q,T}_{M_{disc}}(t,\nu,X;\lambda,\lambda-t\lambda'+\nu)$ ne dépend que de la classe $X+\mathcal{A}_{A_{\tilde{G}},F}$.*

Preuve. Supposons d'abord $F$ non-archimédien. La discussion ci-dessus montre que l'on a l'égalité

$$\phi^{Q,T}_{M_{disc}}(t,\nu,X;\lambda,\Lambda)=r_{\bar{S}|S}(\sigma_{t\lambda'-\nu+\Lambda})r_{\bar{S}|S}(\sigma_{t\lambda'-\nu})^{-1}\phi^{Q,T}_{reg,M_{disc}}(t,\nu,X;\lambda,\Lambda).$$

La dernière fonction est $C^\infty$ en $\lambda$ et $\Lambda$ d'après le lemme 1.6. Le facteur $r_{\bar{S}|S}(\sigma_{t\lambda'-\nu+\Lambda})r_{\bar{S}|S}(\sigma_{t\lambda'-\nu})^{-1}$ est évidemment régulier en $\Lambda=\lambda-t\lambda'+\nu$ pour $\lambda$ en position générale. Il vaut alors $r_{\bar{S}|S}(\sigma_\lambda)r_{\bar{S}|S}(\sigma_{t\lambda'-\nu})^{-1}$. Pour prouver (ii) et (iii), il reste à montrer que ce dernier terme est régulier en $\lambda$. Par l'isomorphisme $\omega\sigma_{-\nu} \simeq t\sigma'$, on a $\sigma_{t\lambda'-\nu} \simeq \omega^{-1}t(\sigma_\lambda \circ \theta)$. Par transport de structure et parce que les facteurs de normalisation sont insensibles à la torsion par le caractère $\omega$, on a $r_{\bar{S}|S}(\sigma_{t\lambda'-\nu}) = r_{\theta t^{-1}(\bar{S})|\theta t^{-1}(S)}(\sigma_\lambda)$. Mais alors, le quotient

$$r_{\bar{S}|S}(\sigma_\lambda)r_{\bar{S}|S}(\sigma_{t\lambda'-\nu})^{-1} = r_{\bar{S}|S}(\sigma_\lambda)r_{\theta t^{-1}(\bar{S})|\theta t^{-1}(S)}(\sigma_\lambda)^{-1}$$

est régulier d'après 1.10(5).

Supposons maintenant $F$ archimédien. Le même raisonnement prouve les assertions de régularité. Pour montrer l'assertion de croissance lente, le lemme 1.4 nous ramène à prouver que que

- les dérivées des fonctions intervenant dans la définitions des termes $\phi_{reg}(t,\nu;\lambda,\Lambda,S'')$ sont à croissance lente ;

- les dérivées de la fonction $r_{\bar{S}|S}(\sigma_\lambda)r_{\bar{S}|S}(\sigma_{t\lambda'-\nu})^{-1}$ sont à croissance lente.

Les opérateurs d'entrelacement normalisés ont des dérivées à croissance lente. Les autres fonctions intervenant sont toutes de la forme $r_{\bar{S}_1|S_1}(\sigma_\mu)r_{\bar{S}_2|S_2}(\sigma_\mu)^{-1}$ où $S_1, S_2 \in \mathcal{P}(M_{disc})$ et $\mu$ dépend linéairement de $\lambda$. L'assertion résulte de 1.10(5).

Preuve de (iv). Pour $Y \in \mathcal{A}_{A_{\tilde{G}},F}$, l'égalité suivante résulte des définitions

$$\phi^{Q,T}_{M_{disc}}(t,\nu,X+Y;\lambda,\lambda-t\lambda'+\nu) = e^{<\lambda-t\lambda'+\nu,Y>}\phi^{Q,T}_{M_{disc}}(t,\nu,X;\lambda,\lambda-t\lambda'+\nu).$$

Evidemment $e^{<\lambda-t\lambda',Y>} = 1$. En comparant les restrictions à $A_{\tilde{G}}(F)$ des caractères centraux des représentations $\omega\sigma$ et $t\sigma'$, l'isomorphisme $\omega\sigma_{-\nu} \simeq t\sigma'$ et le fait que $\omega$ soit trivial sur $A_{\tilde{G}}(F)$ entraîne que $\nu_{\tilde{G}} \in i\mathcal{A}^\vee_{A_{\tilde{G}},F}$. Donc $e^{<\nu,Y>} = 1$. Cela prouve (iii). $\square$

## 3.17 Définition d'une nouvelle intégrale

Pour deux sous-groupes paraboliques $Q = LU_Q, R \in \mathcal{F}(M_{disc})$ tels que $Q \subset R$ et pour $t \in W^G(M_{disc}|M'_{disc})$, notons $s^R_Q(t)$ la somme des

$$(-1)^{dim(\mathfrak{a}_{\tilde{M}})-dim(\mathfrak{a}_{\tilde{G}})}$$

sur les espaces paraboliques $\tilde{P} = \tilde{M}U_P$ tels que $Q \subset P \subset R$ et $t\theta^{-1}(P) = P$. Cette dernière condition équivaut à $\gamma_0 t^{-1} \in \tilde{P}(F)$ (où on identifie $t$ à un relèvement dans $K$). La condition $s^R_Q(t) \neq 0$ équivaut à ce qu'il existe un et un seul $\tilde{P}$ vérifiant ces conditions. Soient $t \in W^G(M_{disc}|M'_{disc})$ et $\nu \in [t\sigma', \omega\sigma]$. Posons

$$\mathbf{E}^T_{Q,R,t,\nu} = mes(i\mathcal{A}^*_{M_{disc},F})^{-1}\int_{\mathcal{A}_{L,F}/\mathcal{A}_{A_{\tilde{G}},F}} \tilde{\sigma}^R_Q(X-T[Q])$$

$$\int_{i\mathcal{A}^*_{M_{disc},F}} B(\lambda)\phi^{Q,T}_{M_{disc}}(t,\nu,X;\lambda,\lambda-t\lambda'+\nu)\,d\lambda\,dX.$$

**Lemme**. *Si $s^R_Q(t) \neq 0$, l'expression $\mathbf{E}^T_{Q,R,t,\nu}$ est convergente dans l'ordre indiqué.*

Preuve. La convergence absolue de l'intégrale intérieure résulte du (ii) du lemme précédent et du fait que $B$ est de Schwartz. Puisque $\mathcal{A}_{A_L,F}$ est d'indice fini dans $\mathcal{A}_{L,F}$, on peut fixer $X_0 \in \mathcal{A}_{L,F}$ et prouver que l'expression

$$\int_{\mathcal{A}_{A_L,F}/\mathcal{A}_{A_{\tilde{G}},F}} \tilde{\sigma}^R_Q(X+X_0-T[Q])|\int_{i\mathcal{A}^*_{M_{disc},F}} B(\lambda)\phi^{Q,T}_{M_{disc}}(t,\nu,X+X_0;\lambda,\lambda-t\lambda'+\nu)\,d\lambda|\,dX$$

est convergente. Il résulte des définitions que

$$\phi^{Q,T}_{M_{disc}}(t,\nu,X+X_0;\lambda,\lambda-t\lambda'+\nu)=e^{<\lambda-t\lambda'+\nu,X>}\phi^{Q,T}_{M_{disc}}(t,\nu,X_0;\lambda,\lambda-t\lambda'+\nu).$$

Ainsi l'expression ci-dessus est de la forme

$$\int_{\mathcal{A}_{A_L,F}/\mathcal{A}_{A_{\tilde{G}},F}}\tilde{\sigma}^R_Q(X+X_0-T[Q])|\int_{i\mathcal{A}^*_{M_{disc},F}}B'(\lambda)e^{<\lambda-t\lambda',X>}\,d\lambda|\,dX,$$

où $B'$ est une fonction de Schwartz. En utilisant l'égalité

$$<\lambda-t\lambda',X>=<\lambda,(1-\theta t^{-1})X>,$$

on voit que l'intégrale intérieure est essentiellement majorée par $(1+|(1-\theta t^{-1})X|)^{-r}$ pour tout réel $r$. Pour démontrer la convergence cherchée, et puisque $T$ peut être ici considéré comme une constante, il suffit de prouver que l'on a une majoration

$$(1)\qquad |X^{\tilde{G}}|<<1+|T|+|(1-\theta t^{-1})X|$$

pour tout $T$ et tout $X\in\mathcal{A}_{A_L,F}$ tel que $\tilde{\sigma}^R_Q(X+X_0-T[Q])=1$. Puisque $X_0$ est fixé, cela résulte par translation par $-X_0$ d'une majoration

$$|(X-T[Q])^{\tilde{G}}_L|<<1+|(1-\theta t^{-1})X|$$

pour tout $X\in\mathcal{A}_L$ tel que $\tilde{\sigma}^R_Q(X-T[Q])=1$. Pour mieux comprendre la situation, introduisons un élément $s\in W^G$ tel que $s(Q)$ soit standard. Posons $Q'=s(Q)=L'U_{Q'}$, $R'=s(R)$. La majoration précédente résulte de la majoration

(2) $|(X-T)^{\tilde{G}}_{L'}|<<1+|(s\theta t^{-1}s^{-1}-1)X|$ pour tout $X\in\mathcal{A}_{L'}$ tel que $\tilde{\sigma}^{R'}_{Q'}(X)=1$.

La condition $s^R_Q(t)\neq 0$ se traduit ainsi : il existe un unique espace parabolique $\tilde{P}=\tilde{M}U_P$ tel que $Q'\subset P\subset R'$ et $\theta(st)s^{-1}\in W^M$, autrement dit $s^{R'}_{Q'}(s,st)\neq 0$. On applique le lemme 3.5(iv) en y remplaçant les termes $Q,R,S,w,w',H$ par $Q',R',P_0,s,st,X$ (ces données vérifient les conditions de ce lemme). Ce lemme implique

$$|(X-T)^{\tilde{G}}_{L'}|<<N^{L'}_{s,st}(X).$$

Mais, par définition de ce dernier terme, on a

$$N^{L'}_{s,st}(X)<<1+|(s\theta t^{-1}s^{-1}-1)X|.$$

Cela prouve (2) et le lemme. □

## 3.18 Apparition des $(G,M)$-familles

Soient $Q=LU_Q\subset R$ deux sous-groupes paraboliques standard et soient $w\in W^G(L|S)$, $w'\in W^G(L|S')$ deux éléments tels que $s^R_Q(w,w')\neq 0$. On note $\tilde{P}=\tilde{M}U_P$ l'unique espace parabolique tel que $Q\subset P\subset R$ et $(w,w')\in\mathcal{W}^P_Q$. On pose

$$E^T_{Q,R,w,w'}=\int_{A_{\tilde{G}}(F)\backslash M_0(F)^{\geq,Q}}E^T_{Q,R,w,w'}(m)\,dm$$

$$= \int_{A_{\tilde{G}}(F)\backslash M_0(F)^{\geq,Q}} \tilde{\sigma}_Q^R(H_0(m)-T)\phi^Q(H_0(m)-T)\delta_Q(m)D_0^L(m)\omega_{Q,w,w'}(m)\,dm.$$

Le but du paragraphe est de définir une approximation plus explicite de $E^T_{Q,R,w,w'}$. On pose

$$E^T_{\star;Q,R,w,w'} = \sum_{t\in W^G(M_{disc}|M'_{disc})\cap w^{-1}W^Lw'}\ \sum_{\nu\in[t\sigma',\omega\sigma]} \mathbf{E}^T_{w^{-1}(Q),w^{-1}(R),t,\nu}.$$

On identifie comme toujours un élément $t\in W^G(M_{disc}|M'_{disc})$ à un relèvement dans $W^G$. La condition que $t$ appartienne à $w^{-1}W^Lw'$ ne dépend pas du relèvement choisi. D'autre part, on voit que, pour $t$ dans l'ensemble de sommation, on a $s^{w^{-1}(R)}_{w^{-1}(Q)}(t) = s^R_Q(w,w')$. Notre hypothèse est que ce nombre est non nul. Les termes $\mathbf{E}^T_{w^{-1}(Q),w^{-1}(R),t,\nu}$ sont donc bien définis d'après le lemme précédent.

**Lemme**. *On a une majoration*

$$|E^T_{Q,R,w,w'} - mes(A_{\tilde{G}}(F)_c)^{-1}E^T_{\star;Q,R,w,w'}| << |T|^{-r}$$

*pour tout réel* $r$.

Preuve. Fixons un réel $\zeta>0$. Notons ici $\mathbf{1}_{\zeta T}$ la fonction caractéristique de l'ensemble des $H\in\mathcal{A}_0$ tels que $|H|\leq\zeta|T|$ (ce n'est pas la même fonction qu'en 3.13). Notons $E^{T,\zeta}_{Q,R,w,w'}$ la variante de l'expression $E^T_{Q,R,w,w'}$ où on glisse la fonction $\mathbf{1}_{\zeta T}(H_L^{\tilde{G}}(m))$ dans l'intégrale. Notons $E^{T,\zeta}_{\star;Q,R,w,w'}$ la variante de $E^T_{\star;Q,R,w,w'}$ où on glisse la fonction $\mathbf{1}_{\zeta T}(X^{\tilde{G}})$ dans les intégrales définissant chaque $\mathbf{E}^T_{w^{-1}(Q),w^{-1}(R),t,\nu}$. Il résulte de 3.13(1) que, si $\zeta$ est assez grand, on a la majoration

$$|E^T_{Q,R,w,w'} - E^{T,\zeta}_{Q,R,w,w'}| << |T|^{-r}$$

pour tout réel $r$. De même, en reprenant la preuve du lemme 3.17, il résulte de 3.17(1) que, si $\zeta$ est assez grand, on a la majoration

$$|E^T_{\star;Q,R,w,w'} - E^{T,\zeta}_{\star;Q,R,w,w'}| << |T|^{-r}$$

pour tout réel $r$. On fixe $\zeta$ tel qu'il en soit ainsi. Il nous suffit alors de majorer

$$|E^{T,\zeta}_{Q,R,w,w'} - mes(A_{\tilde{G}}(F)_c)^{-1}E^{T,\zeta}_{\star;Q,R,w,w'}|.$$

Pour $m\in M_0(F)^{\geq,Q}$, on a l'égalité $\phi^Q(H_0(m)-T)=\kappa^{L,T}(m)$, ce dernier terme étant l'analogue de $\kappa^T(m)$ quand on remplace $G$ par $L$, cf. 1.14. On a aussi trivialement $\tilde{\sigma}^R_Q(H_0(m)-T)=\tilde{\sigma}^R_Q(H_L(m)-T)$. Alors $E^{T,\zeta}_{Q,R,w,w'}$ est l'intégrale sur $A_{\tilde{G}}(F)\backslash M_0(F)^{\geq,Q}$ du produit de $D_0^L(m)$ et de

$$\mathbf{1}_{\zeta T}(H_L^{\tilde{G}}(m))\tilde{\sigma}^R_Q(H_L(m)-T)\kappa^{L,T}(m)\delta_Q(m)\omega_{Q,w,w'}(m).$$

Cette dernière fonction est définie non seulement pour $m\in M_0(F)$, mais en tout point de $L(F)$. Elle est biinvariante par $K\cap L(F)$ (cela résulte de la présence d'une intégrale sur $K\times K$ dans la définition de $\omega_{Q,w,w'}(g)$, cf. 3.4). En se rappelant la définition de la fonction $D_0^L(m)$, cf. 1.2, on voit que

$$E^{T,\zeta}_{Q,R,w,w'} = \int_{A_{\tilde{G}}(F)\backslash L(F)} \mathbf{1}_{\zeta T}(H_L^{\tilde{G}}(l))\tilde{\sigma}^R_Q(H_L(l)-T)\kappa^{L,T}(l)\delta_Q(l)\omega_{Q,w,w'}(l)\,dl.$$

L'intégrale sur $A_{\tilde{G}}(F)\backslash L(F)$ se décompose en une intégrale sur $X\in\mathcal{A}_{L,F}/\mathcal{A}_{A_{\tilde{G}},F}$ d'intégrales portant sur $A_{\tilde{G}}(F)\backslash A_{\tilde{G}}(F)L(F;X)$ (on rappelle que $L(F;X)$ est l'ensemble des $l\in L(F)$ tels que $H_L(l)=X$). Précisément

$$E^{T,\zeta}_{Q,R,w,w'}=\int_{\mathcal{A}_{L,F}/\mathcal{A}_{A_{\tilde{G}},F}}\mathbf{1}_{\zeta T}(X^{\tilde{G}})\tilde{\sigma}^R_Q(X-T)e^T_{Q,w,w'}(X)\,dX,$$

où

$$e^T_{Q,w,w'}(X)=\int_{A_{\tilde{G}}(F)\backslash A_{\tilde{G}}(F)L(F;X)}\delta_Q(l)\kappa^{L,T}(l)\omega_{Q,w,w'}(l)\,dl.$$

Fixons $X$. Revenons à la définition de $\omega_{Q,w,w'}(l)$, cf. 3.4. C'est une intégrale portant sur $K\times K\times i\mathcal{A}^*_{M_{disc},F}$. Ces intégrales commutent entre elles et commutent à l'intégrale ci-dessus sur $A_{\tilde{G}}(F)\backslash A_{\tilde{G}}(F)L(F;X)$ car celle-ci est à support compact à cause de la fonction $\kappa^{L,T}(l)$. On obtient

$$e^T_{Q,w,w'}(X)=\int_{i\mathcal{A}^*_{M_{disc},F}}B(\lambda)m^G(\sigma_\lambda)\omega^T_{Q,w,w'}(X,\lambda)\,d\lambda,$$

où

$$\omega^T_{Q,w,w'}(X,\lambda)=\int_{K\times K}\int_{A_{\tilde{G}}(F)\backslash A_{\tilde{G}}(F)L(F;X)}\omega_{Q,w,w'}(l,k,k',\lambda)\omega(l)\delta_Q(l)\kappa^{L,T}(l)\,dl\,\omega(k^{-1}k')\,dk\,dk'.$$

Fixons $\lambda$ que l'on suppose provisoirement en position générale. Introduisons les représentations $\rho_{w\lambda}=Ind^L_{w(S)\cap L}((w\sigma)_{w\lambda})$ et $\rho'_{w'\lambda'}=Ind^L_{w'(S')\cap L}((w'\sigma')_{w'\lambda'})$ de $L(F)$, que l'on réalise dans les espaces $V^L_{w\sigma,w(S)\cap L}$ et $V^L_{w'\sigma',w'(S')\cap L}$. Pour $k,k'\in K$, introduisons des éléments $u_w(k',\lambda),v_w(k,\lambda)\in V^L_{w\sigma,w(S)\cap L}$ et $u'_{w'}(k,\lambda'),v'_{w'}(k',\lambda')\in V^L_{w'\sigma',w'(S')\cap L}$ définis par

$$u_w(k',\lambda)=(R_{\underline{Q}_w|w(S)}((w\sigma)_{w\lambda})\circ\gamma(w)\circ\pi_\lambda(k')u)_{K\cap L(F)},$$

$$v_w(k,\lambda)=(R_{Q_w|w(S)}((w\sigma)_{w\lambda})\circ\gamma(w)\circ\pi_\lambda(k)v)_{K\cap L(F)},$$

$$u'_{w'}(k,\lambda')=(R_{Q_{w'}|w'(S')}((w'\sigma')_{w'\lambda'})\circ\gamma(w')\circ\pi'_{\lambda'}(k)u')_{K\cap L(F)},$$

$$v'_{w'}(k',\lambda')=(R_{\underline{Q}_{w'}|w'(S')}((w'\sigma')_{w'\lambda'})\circ\gamma(w')\circ\pi'_{\lambda'}(k')v')_{K\cap L(F)}.$$

Les termes entre parenthèses de ces expressions sont des éléments de $V_{w\sigma,\underline{Q}_w}$, resp. $V_{w\sigma,Q_w}$, $V_{w'\sigma',Q_{w'}}$, $V_{w'\sigma',\underline{Q}_{w'}}$. Par définition de ces espaces, ce sont des fonctions sur $K$. L'indice final $K\cap L(F)$ signifie que l'on prend leurs restrictions à $K\cap L(F)$. On obtient des éléments des espaces indiqués. Avec ces notations, la définition de $\omega^T_{Q,w,w'}(X,\lambda)$ se récrit

$$\omega^T_{Q,w,w'}(X,\lambda)=\mathbf{r}_{w,w'}(\sigma_\lambda)\int_{K\times K}\int_{A_{\tilde{G}}(F)\backslash A_{\tilde{G}}(F)L(F;X)}(v_w(k,\lambda),\rho_{w\lambda}(l)u_w(k',\lambda))$$

$$(\rho'_{w'\lambda'}(l)v'_{w'}(k',\lambda'),u'_{w'}(k,\lambda'))\omega(l)\kappa^{L,T}(l)\,dl\,\omega(k'k^{-1})\,dk\,dk'.$$

Notons que le $\delta_Q(l)$ disparaît dans la transition entre induites pour $G(F)$ et induites pour $L(F)$. L'intégrale intérieure est de la forme de celles considérées en 1.14, le groupe ambiant $G$ de ce paragraphe étant remplacé par $L$ et le tore $D$ étant $A_{\tilde{G}}$. On déduit des constructions de 1.14 une valeur approchée de $\omega^T_{Q,w,w'}(X,\lambda)$, notons-la $r^T_{Q,w,w'}(X,\lambda)$.

On l'étudiera plus loin. Le théorème 1.14 entraîne l'existence d'un réel $c > 0$ et d'une fonction lisse et à croissance modérée $C$ sur $i\mathcal{A}^*_{M_{disc},F}$ de sorte que l'on ait la majoration

$$|\omega^T_{Q,w,w'}(X,\lambda) - r^T_{Q,w,w'}(X,\lambda)| \leq \mathbf{r}_{w,w'}(\sigma_\lambda) m^L((w\sigma)_{w\lambda})^{-1/2} m^L((w'\sigma')_{w'\lambda'})^{-1/2} C(\lambda) e^{-c|T|}.$$

Définissons au moins formellement

$$r^T_{Q,w,w'}(X) = \int_{i\mathcal{A}^*_{M_{disc},F}} B(\lambda) m^G(\sigma_\lambda) r^T_{Q,w,w'}(X,\lambda)\, d\lambda,$$

$$R^{T,\zeta}_{Q,R,w,w'} = \int_{\mathcal{A}_{L,F}/\mathcal{A}_{A_{\tilde{G}},F}} \mathbf{1}_{\zeta T}(X^{\tilde{G}}) \tilde{\sigma}^R_Q(X-T) r^T_{Q,w,w'}(X)\, dX.$$

On obtient

$$|E^{T,\zeta}_{Q,R,w,w'} - R^{T,\zeta}_{Q,R,w,w'}| \leq e^{-c|T|} \int_{\mathcal{A}_{L,F}/\mathcal{A}_{A_{\tilde{G}},F}} \mathbf{1}_{\zeta T}(X^{\tilde{G}}) \tilde{\sigma}^R_Q(X-T)\, dX$$

$$\int_{i\mathcal{A}^*_{M_{disc},F}} |B(\lambda) m^G(\sigma_\lambda) \mathbf{r}_{w,w'}(\sigma_\lambda) m^L((w\sigma)_{w\lambda})^{-1/2} m^L((w'\sigma')_{w'\lambda'})^{-1/2} C(\lambda)|\, d\lambda.$$

Ces calculs sont justifiés par le résultat suivant :

(1) le membre de droite de l'expression ci-dessus est convergent ; il est essentiellement majoré par $|T|^{-r}$ pour tout réel $r$.

A cause de la fonction $\mathbf{1}_{\zeta T}(X^{\tilde{G}})$, l'intégrale en $X$ est convergente et essentiellement majorée par $|T|^D$ pour un certain entier $D$. Il suffit donc de prouver la convergence de l'intégrale en $\lambda$. Puisque $B$ est de Schwartz, celle-ci résulte de :

(2) $|m^G(\sigma_\lambda) \mathbf{r}_{w,w'}(\sigma_\lambda) m^L((w\sigma)_{w\lambda})^{-1/2} m^L((w'\sigma')_{w'\lambda'})^{-1/2}| = 1$.

On rappelle que

$$\mathbf{r}_{w,w'}(\sigma_\lambda) = r_{\underline{Q}_w|Q_w}((w\sigma)_{w\lambda}) r_{Q_{w'}|\underline{Q}_{w'}}((w'\sigma')_{w'\lambda'}).$$

On a l'égalité

$$r_{\overline{Q_w}|Q_w}((w\sigma)_{w\lambda}) = r_{\overline{Q_w}|\underline{Q}_w}((w\sigma)_{w\lambda}) r_{\underline{Q}_w|Q_w}((w\sigma)_{w\lambda}).$$

D'après la définition de $\underline{Q}_w$ et les propriétés usuelles des facteurs de normalisation, on a

$$r_{\overline{Q_w}|\underline{Q}_w}((w\sigma)_{w\lambda}) = r^L_{\overline{(w(S)\cap L)}|(w(S)\cap L)}((w\sigma)_{w\lambda}).$$

On utilise 1.10(4) dans $G$ et dans $L$. Parce que $d(\sigma) = d(w\sigma)$ et $m^G(\sigma_\lambda) = m^G((w\sigma)_{w\lambda})$, on en déduit

$$|r_{\underline{Q}_w|Q_w}((w\sigma)_{w\lambda})| = m^G(\sigma_\lambda)^{-1/2} m^L((w\sigma)_{w\lambda})^{1/2}.$$

De même, on a

$$|r_{Q_{w'}|\underline{Q}_{w'}}((w'\sigma')_{w'\lambda'})| = m^G(\sigma_\lambda)^{-1/2} m^L((w'\sigma')_{w'\lambda'})^{1/2}.$$

L'assertion (2) en résulte, puis (1).

Pour démontrer le lemme, il nous reste à prouver l'égalité

$$(3) \qquad R^{T,\zeta}_{Q,R,w,w'} = mes(A_{\tilde{G}}(F)_c)^{-1} \mathbf{E}^{T,\zeta}_{Q,R,w,w'}.$$

Pour cela, il faut revenir à la définition du membre de gauche, et d'abord du terme $r^T_{Q,w,w'}(X,\lambda)$. On suppose $\lambda$ en position générale et on dédouble la variable $\lambda$. Plus précisément, on conserve inchangés les termes où intervient la variable $\lambda'=\theta^{-1}\lambda$ et, dans les autres termes, on remplace $\lambda$ par $\mu\in i\mathcal{A}^*_{M_{disc},F}$. En particulier, on effectue cette substitution dans la définition de $\mathbf{r}_{w,w'}(\sigma_\lambda)$, qui devient un terme dépendant de $\lambda'$ et $\mu$, notons-le $\mathbf{r}_{w,w'}(\lambda',\mu)$. D'après les définitions ci-dessus, d'après celles de 1.14 et la formule (2) de ce paragraphe, $r^T_{Q,w,w'}(X,\lambda)$ est la valeur en $\mu=\lambda$ d'une expression composée de :

- une intégrale sur $(k,k')\in K\times K$ ;
- une somme sur les sous-groupes paraboliques $S_1=M_1U_1$ tels que $P_0\subset S_1\subset Q$ ;
- une somme sur $s\in W^L(M_1|w(M_{disc}))$, $s'\in W^L(M_1|w'(M'_{disc}))$ ;
- une somme sur $\nu\in[s'w'\sigma',\omega sw\sigma]$ ;

le terme que l'on somme est

$$(4)\qquad C\mathbf{r}_{w,w'}(\lambda',\mu)\omega(k'k^{-1})d(\sigma)^{-1}\epsilon^{Q,T}_{S_1}(X;sw\mu-s'w'\lambda'+\nu)$$

$$(J^L_{(\bar{S}_1\cap L)|(s'w'(S')\cap L)}((s'w'\sigma')_{s'w'\lambda'})\circ\gamma(s')v'_{w'}(k',\lambda'),\underline{\omega}\circ A_\nu\circ J^L_{(\bar{S}_1\cap L)|(sw(S)\cap L)}((sw\sigma)_{sw\mu})\circ\gamma(s)u_w(k',\mu))$$

$$(\underline{\omega}\circ A_\nu\circ J^L_{(S_1\cap L)|(sw(S)\cap L)}((sw\sigma)_{sw\mu})\circ\gamma(s)v_w(k,\mu),J^L_{(S_1\cap L)|(s'w'(S')\cap L)}((s'w'\sigma')_{s'w'\lambda'})\circ\gamma(s')u'_{w'}(k,\lambda')),$$

où

$$C=mes(i\mathcal{A}^*_{M_{disc},F})^{-1}mes(A_{\tilde{G}}(F)_c)^{-1}.$$

On fait disparaître le terme $\mathbf{r}_{w,w'}(\lambda',\mu)$ en rétablissant les opérateurs d'entrelacement non normalisés dans les définitions des éléments $u_w(k',\mu)$, etc... Notons $\mathbf{u}_w(k',\mu)$ etc... les éléments définis à l'aide des opérateurs non normalisés. La propriété usuelle de compatibilité des opérateurs d'entrelacement à l'induction conduit à l'égalité

$$J^L_{(\bar{S}_1\cap L)|(sw(S)\cap L)}((sw\sigma)_{sw\mu})\circ\gamma(s)\mathbf{u}_w(k',\mu)=$$

$$(J_{\bar{S}_1|s(\underline{Q}_w)}((sw\sigma)_{sw\mu})\circ\gamma(s)\circ J_{\underline{Q}_w|w(S)}((w\sigma)_{w\mu})\circ\gamma(w)\circ\pi_\mu(k')u)_{K\cap L(F)}.$$

D'après les définitions, la distance entre les deux sous-groupes paraboliques $\bar{S}_1$ et $sw(S)$ est la somme des distances entre $\bar{S}_1$ et $s(\underline{Q}_w)$ et entre $s(\underline{Q}_w)$ et $sw(S)$. Par composition des opérateurs d'entrelacement, on obtient

$$J^L_{(\bar{S}_1\cap L)|(sw(S)\cap L)}((sw\sigma)_{sw\mu})\circ\gamma(s)\mathbf{u}_w(k',\mu)=(J_{\bar{S}_1|sw(S)}((sw\sigma)_{sw\mu})\circ\gamma(sw)\circ\pi_\mu(k')u)_{K\cap L(F)},$$

puis

$$\underline{\omega}\circ A_\nu\circ J^L_{(\bar{S}_1\cap L)|(sw(S)\cap L)}((sw\sigma)_{sw\mu})\circ\gamma(s)\mathbf{u}_w(k',\mu)=$$

$$(\underline{\omega}\circ A_\nu\circ J_{\bar{S}_1|sw(S)}((sw\sigma)_{sw\mu})\circ\gamma(sw)\circ\pi_\mu(k')u)_{K\cap L(F)}.$$

Il y a là un abus d'écriture : le premier $\underline{\omega}$ porte sur des fonctions sur $K\cap L(F)$, le second sur des fonctions sur $K$. De même

$$J^L_{(\bar{S}_1\cap L)|(s'w'(S')\cap L)}((s'w'\sigma')_{s'w'\lambda'})\circ\gamma(s')\mathbf{v}'_{w'}(k',\lambda')=$$

$$(J_{\bar{S}_1|s'w'(S')}((s'w'\sigma')_{s'w'\lambda'})\circ\gamma(s'w')\circ\pi'_{\lambda'}(k')v')_{K\cap L(F)}$$

Le premier produit scalaire de l'expression (4) (transformé comme on l'a dit ci-dessus) s'écrit donc

$$\int_{K\cap L(F)}((J_{\bar{S}_1|s'w'(S')}((s'w'\sigma')_{s'w'\lambda'})\circ\gamma(s'w')\circ\pi'_{\lambda'}(k')v')(h),$$

$$(\underline{\omega} \circ A_\nu \circ J_{\bar{S}_1|sw(S)}((sw\sigma)_{sw\mu}) \circ \gamma(sw) \circ \pi_\mu(k')u)(h))\, dh.$$

On peut commuter l'opérateur $\pi'_{\lambda'}(k')$ aux opérateurs qui le précèdent et remplacer le premier terme par

$$(J_{\bar{S}_1|s'w'(S')}((s'w'\sigma')_{s'w'\lambda'}) \circ \gamma(s'w')v')(hk').$$

On peut commuter l'opérateur $\pi_\mu(k')$ aux opérateurs qui le précèdent, mais, d'après la définition de $\underline{\omega}$, la commutation à cet opérateur fait sortir un terme $\omega(k')^{-1}$. On peut donc remplacer le deuxième terme par

$$\omega(k')^{-1}(\underline{\omega} \circ A_\nu \circ J_{\bar{S}_1|sw(S)}((sw\sigma)_{sw\mu}) \circ \gamma(sw)u)(hk').$$

On se rappelle que dans (4) figure une multiplication par $\omega(k')$ et que l'on doit intégrer tout cela en $k' \in K$. Après ces opérations, le premier produit scalaire de (4) devient plus simplement le produit scalaire

$$(J_{\bar{S}_1|s'w'(S')}((s'w'\sigma')_{s'w'\lambda'}) \circ \gamma(s'w')v', \underline{\omega} \circ A_\nu \circ J_{\bar{S}'|sw(S)}((sw\sigma)_{sw\mu}) \circ \gamma(sw)u),$$

ou encore

$$(A_\nu^{-1} \circ \underline{\omega}^{-1} \circ J_{\bar{S}_1|s'w'(S')}((s'w'\sigma')_{s'w'\lambda'}) \circ \gamma(s'w')v', J_{\bar{S}'|sw(S)}((sw\sigma)_{sw\mu}) \circ \gamma(sw)u).$$

On traite de même le second produit scalaire. On obtient que $r^T_{Q,w,w'}(X,\lambda)$ est la valeur en $\mu = \lambda$ d'une expression composée de sommes sur les $S_1$, $s$, $s'$, $\nu$ de termes

$$(5) \qquad Cd(\sigma)^{-1}\epsilon^{Q,T}_{S_1}(X; sw\mu - s'w'\lambda' + \nu)$$

$$(A_\nu^{-1} \circ \underline{\omega}^{-1} \circ J_{\bar{S}_1|s'w'(S')}((s'w'\sigma')_{s'w'\lambda'}) \circ \gamma(s'w')v', J_{\bar{S}'|sw(S)}((sw\sigma)_{sw\mu}) \circ \gamma(sw)u)$$

$$(J_{S_1|sw(S)}((sw\sigma)_{sw\mu}) \circ \gamma(sw)v, A_\nu^{-1} \circ \underline{\omega}^{-1} \circ J_{S_1|s'w'(S')}((s'w'\sigma')_{s'w'\lambda'}) \circ \gamma(s'w')u').$$

L'ensemble de sommation $[s'w'\sigma'; \omega sw\sigma]$ est celui des $\nu \in i\mathcal{A}^*_{M_1,F}$ tels que $s'w'\sigma' \simeq \omega(sw\sigma)_{-\nu}$. Posons $t = w^{-1}s^{-1}s'w'$. C'est un élément de $W^G(M_{disc}|M'_{disc})$. L'application

$$\begin{array}{ccc} [t\sigma'; \omega\sigma] & \to & [s'w'\sigma'; \omega sw\sigma] \\ \nu & \mapsto & sw\nu \end{array}$$

est bijective. Plus précisément, remarquons que toutes les représentations $\sigma$, $t\sigma'$, $sw\sigma$ et $s'w'\sigma'$ se réalisent naturellement dans le même espace $V_\sigma$. Soit $\nu \in [t\sigma'; \omega\sigma]$, introduisons un automorphisme unitaire $A_\nu$ de $V_\sigma$ tel que $(t\sigma')(x) \circ A_\nu = \omega(x)A_\nu \circ \sigma_{-\nu}(x)$ pour tout $x \in M_{disc}(F)$. Alors $A_\nu$ vérifie aussi $s'w'\sigma'(x) \circ A_\nu = \omega(x)A_\nu \circ (sw\sigma)_{-sw\nu}(x)$ pour tout $x \in M_1(F)$. On peut donc remplacer l'ensemble de sommation $[s'w'\sigma'; \omega sw\sigma]$ par $[t\sigma'; \omega\sigma]$, en remplaçant $\nu$ par $sw\nu$, tout en prenant $A_{sw\nu} = A_\nu$. Rappelons que les opérateurs intervenant dans (5) sont en fait déduits par fonctorialité de ces opérateurs $A_\nu$. On vérifie l'égalité

$$A_\nu^{-1} \circ \underline{\omega}^{-1} \circ J_{\bar{S}_1|s'w'(S')}((s'w'\sigma')_{s'w'\lambda'}) \circ \gamma(s'w') = J_{\bar{S}_1|s'w'(S')}((sw\sigma)_{s'w'\lambda' - sw\nu}) \circ \gamma(s'w') \circ A_\nu^{-1} \circ \underline{\omega}^{-1}.$$

Comme en 3.16, on introduit l'opérateur

$$A(t,\nu;\Lambda) = R_{S|t(S')}(\sigma_\Lambda) \circ \gamma(t) \circ A_\nu^{-1} \circ \underline{\omega}^{-1} : Ind^G_{S'}(\sigma'_{t^{-1}(\Lambda+\nu)}) \to Ind^G_S(\sigma_\Lambda).$$

On calcule

$$J_{\bar{S}_1|s'w'(S')}((sw\sigma)_{s'w'\lambda'-sw\nu})\circ\gamma(s'w')\circ A_\nu^{-1}\circ\underline{\omega}^{-1}=r_{\bar{S}_1|s'w'(S')}((sw\sigma)_{s'w'\lambda'-sw\nu})$$

$$R_{\bar{S}_1|s'w'(S')}((sw\sigma)_{s'w'\lambda'-sw\nu})\circ\gamma(s'w')\circ A_\nu^{-1}\circ\underline{\omega}^{-1}$$

$$=r_{\bar{S}_1|s'w'(S')}((sw\sigma)_{s'w'\lambda'-sw\nu})R_{\bar{S}_1|sw(S)}((sw\sigma)_{s'w'\lambda'-sw\nu})\circ\gamma(sw)\circ A(t,\nu;t\lambda'-\nu)$$

$$=r_{\bar{S}_1|s'w'(S')}((sw\sigma)_{s'w'\lambda'-sw\nu})R_{sw(S)|\bar{S}_1}((sw\sigma)_{s'w'\lambda'-sw\nu})^{-1}\circ\gamma(sw)\circ A(t,\nu;t\lambda'-\nu)$$

$$=r_{\bar{S}_1|s'w'(S')}((sw\sigma)_{s'w'\lambda''-sw\nu})r_{sw(S)|\bar{S}_1}((sw\sigma)_{s'w'\lambda'-sw\nu})$$

$$J_{sw(S)|\bar{S}_1}((sw\sigma)_{s'w'\lambda'-sw\nu})^{-1}\circ\gamma(sw)\circ A(t,\nu;t\lambda'-\nu).$$

La deuxième égalité nécessite que nos relèvements vérifient $t=w^{-1}s^{-1}s'w$, ce que l'on peut supposer. Un calcul analogue vaut si l'on remplace $\bar{S}'$ par $S'$. En utilisant ensuite les propriétés d'adjonction des opérateurs d'entrelacement, on voit que $r^T_{Q,w,w'}(X,\lambda)$ est la valeur en $\mu=\lambda$ d'une expression composée de sommes sur les $S_1$, $s$, $s'$ comme précédemment et sur $\nu\in[t\sigma',\omega\sigma]$ de termes

$$(6)\qquad C\epsilon^{Q,T}_{S_1}(X;sw\mu-s'w'\lambda'+sw\nu)r(S_1,s,s';s'w'\lambda'-sw\nu)$$

$$(A(t,\nu;t\lambda'-\nu)v',\gamma(w^{-1}s^{-1})\circ J_{\bar{S}_1|sw(S)}((sw\sigma)_{s'w'\lambda'-sw\nu})^{-1}\circ J_{\bar{S}_1|sw(S)}((sw\sigma)_{sw\mu})\circ\gamma(sw)u)$$

$$(\gamma(w^{-1}s^{-1})\circ J_{S_1|sw(S)}((sw\sigma)_{s'w'\lambda'-sw\nu})^{-1}\circ J_{S'|sw(S)}((sw\sigma)_{sw\mu})\circ\gamma(sw)v,A(t,\nu,t\lambda'-\nu)u'),$$

où, pour $\xi\in i\mathcal{A}^*_{M_{S'},F}$, on a posé

$$r(S_1,s,s';\xi)=d(\sigma)^{-1}r_{S_1|s'w'S'}((sw\sigma)_\xi)r_{sw(S)|S_1}((sw\sigma)_\xi)\overline{r_{\bar{S}_1|s'w'S'}((sw\sigma)_\xi)r_{sw(S)|\bar{S}_1}((sw\sigma)_\xi)}.$$

En utilisant 1.10(3), on obtient

$$r(S_1,s,s';\xi)=d(\sigma)^{-1}r_{S_1|\bar{S}_1}((sw\sigma)_\xi)r_{\bar{S}_1|S_1}((sw\sigma)_\xi).$$

Puisque $d(\sigma)=d(sw\sigma)$, ceci n'est autre que $m^G((sw\sigma)_\xi)^{-1}$, lui-même égal à $m^G(\sigma_{w^{-1}s^{-1}\xi})$. Pour $\xi=s'w'\lambda'-sw\nu$, on a $\sigma_{w^{-1}s^{-1}\mu}=\sigma_{t\lambda'-\nu}\simeq\omega^{-1}(t\sigma')_{t\lambda'}=\omega^{-1}t((\sigma_\lambda)\circ\theta)$. La mesure de Plancherel est invariante par automorphisme et on vérifie facilement qu'elle est aussi invariante par torsion par un caractère unitaire. On obtient $r(S_1,s,s';s'w'\lambda'-sw\nu)=m^G(\sigma_\lambda)^{-1}$.

On peut remplacer la sommation sur $s'$ par une sommation sur $t=w^{-1}s^{-1}s'w'$. Cet élément décrit l'ensemble $W^G(M_{disc}|M'_{disc})\cap w^{-1}W^Lw'$, en identifiant pour simplifier le premier ensemble à un ensemble de représentants dans $W^G$. On peut remplacer la somme en $S_1$ et $s$ par une somme sur $S''=w^{-1}s^{-1}(S_1)$. Ce parabolique décrit l'ensemble $\mathcal{P}^{w^{-1}(Q)}(M_{disc})$ des $S''\in\mathcal{P}(M_{disc})$ tels que $S''\subset w^{-1}(Q)$. On a les égalités

$$\gamma(w^{-1}s^{-1})\circ J_{\bar{S}_1|sw(S)}((sw\sigma)_{s'w'\lambda'-sw\nu})^{-1}\circ J_{\bar{S}_1|sw(S)}((sw\sigma)_{sw\mu})\circ\gamma(sw)=$$

$$J_{\bar{S}''|S}(\sigma_{t\lambda'-\nu})^{-1}\circ J_{\bar{S}''|S}(\sigma_\mu),$$

$$\gamma(w^{-1}s^{-1})\circ J_{S_1|sw(S)}((sw\sigma)_{s'w'\lambda'-sw\nu})^{-1}\circ J_{S_1|sw(S)}((sw\sigma)_{sw\mu})\circ\gamma(sw)=$$

$$J_{S''|S}(\sigma_{t\lambda'-\nu})^{-1}\circ J_{S''|S}(\sigma_\mu),$$

$$\epsilon^{Q,T}_{S_1}(X,sw\mu-s'w'\lambda'+sw\nu)=\epsilon^{w^{-1}(Q),T[S'']}_{S''}(w^{-1}X,\mu-t\lambda'+\nu).$$

En utilisant les définitions de 3.16, l'expression (6) se récrit

$$Cm^G(\sigma_\lambda)^{-1}\epsilon_{S''}^{w^{-1}(Q),T[S'']}(w^{-1}X,\mu-t\lambda'+\nu)\phi(t,\nu;\lambda,\mu-t\lambda'+\nu,S'').$$

En sommant sur $S''$, on obtient

$$Cm^G(\sigma_\lambda)^{-1}\phi_{M_{disc}}^{w^{-1}(Q),T}(t,\nu,w^{-1}(X);\lambda,\mu-t\lambda'+\nu).$$

A ce point, le lemme 3.16 nous autorise à égaler $\mu$ à $\lambda$. On obtient finalement

$$r_{Q,w,w'}^T(X,\lambda)=Cm^G(\sigma_\lambda)^{-1}\sum_{t\in W^G(M_{disc}|M'_{disc})\cap w^{-1}W^Lw'}$$

$$\sum_{\nu\in[t\sigma',\omega\sigma]}\phi_{M_{disc}}^{w^{-1}(Q),T}(t,\nu,w^{-1}(X);\lambda,\lambda-t\lambda'+\nu).$$

En appliquant les définitions, on obtient ensuite

$$R_{Q,R,w,w'}^{T,\zeta}=C\sum_{t\in W^G(M_{disc}|M'_{disc})\cap w^{-1}W^Lw'}\sum_{\nu\in[t\sigma',\omega\sigma]}\int_{\mathcal{A}_{L,F}/\mathcal{A}_{A_{\tilde{G}},F}}\mathbf{1}_{\zeta T}(X^{\tilde{G}})\tilde{\sigma}_Q^R(X-T)$$

$$\int_{i\mathcal{A}^*_{M_{disc},F}}B(\lambda)\phi_{M_{disc}}^{w^{-1}(Q),T}(t,\nu,w^{-1}(X);\lambda,\lambda-t\lambda'+\nu)\,d\lambda\,dX.$$

On a $\tilde{\sigma}_Q^R(X-T)=\tilde{\sigma}_{w^{-1}(Q)}^{w^{-1}(R)}(w^{-1}X-T[w^{-1}(Q)])$. Par le changement de variables $X\mapsto wX$, la double intégrale multipliée par $C$ devient $mes(A_{\tilde{G}}(F)_c)^{-1}\mathbf{E}^T_{w^{-1}(Q),w^{-1}(R),t,\nu}$ et on obtient l'égalité cherchée

$$R_{Q,R,w,w'}^{T,\zeta}=mes(A_{\tilde{G}}(F)_c)^{-1}E^T_{\star;Q,R,w,w'}.$$

Cela achève la preuve. □

## 3.19 Une nouvelle expression approchant $j^T$

Pour $Q=LU_Q\in\mathcal{F}(M_{disc})$ et $t\in W^G(M_{disc}|M'_{disc})$, définissons une fonction $H\mapsto S_Q(t;H)$ sur $\mathcal{A}_0$ par

$$S_Q(t;H)=\sum_{R;Q\subset R}s_Q^R(t)\tilde{\sigma}_Q^R(H).$$

En dévissant la définition de $s_Q^R(t)$, on a aussi

$$S_Q(t;H)=\sum_{\tilde{P}=\tilde{M}U_P;Q\subset P,t\theta^{-1}(P)=P}(-1)^{dim(\mathfrak{a}_{\tilde{M}})-dim(\mathfrak{a}_{\tilde{G}})}\sum_{R;P\subset R}\tilde{\sigma}_Q^R(H),$$

ou encore, en utilisant 2.2(1),

$$S_Q(t;H)=\sum_{\tilde{P}=\tilde{M}U_P;Q\subset P,t\theta^{-1}(P)=P}(-1)^{dim(\mathfrak{a}_{\tilde{M}})-dim(\mathfrak{a}_{\tilde{G}})}\tau_Q^P(H)\hat{\tau}_{\tilde{P}}(H).$$

Pour $\nu\in[t\sigma',\omega\sigma]$, posons

$$\mathbf{E}_{t,\nu}^T=mes(i\mathcal{A}^*_{M_{disc},F})^{-1}\sum_{Q=LU_Q\in\mathcal{F}(M_{disc})}\int_{\mathcal{A}_{L,F}/\mathcal{A}_{A_{\tilde{G}},F}}S_Q(t;X-T[Q])$$

$$\int_{i\mathcal{A}^*_{M_{disc},F}} B(\lambda)\phi^{Q,T}_{M_{disc}}(t,\nu,X;\lambda;\lambda-t\lambda'+\nu)\,d\lambda\,dX.$$

Ceci n'est autre que

$$\sum_{Q,R\in\mathcal{F}(M_{disc});Q\subset R} s^R_Q(t)\mathbf{E}^T_{Q,R,t,\nu}$$

qui est une expression convergente d'après le lemme 3.18. Posons

$$\mathbf{E}^T=\sum_{t\in W(M_{disc}|M'_{disc})}\sum_{\nu\in[t\sigma',\omega\sigma]}\mathbf{E}^T_{t,\nu}.$$

**Lemme**. *On a la majoration*

$$|j^T-mes(A_{\tilde{G}}(F)_c)^{-1}\mathbf{E}^T|<<|T|^{-r}$$

*pour tout réel* $r$.

Preuve. La proposition 3.4 nous dit que l'on peut aussi bien remplacer $j^T$ par $j^T_\star$, c'est-à-dire par

$$\sum_{Q=LU_Q,R;P_0\subset Q\subset R}\sum_{w\in W^G(L|S),w'\in W^G(L|S')} s^R_Q(w,w')E^T_{Q,R,w,w'}.$$

Le lemme 3.18 nous dit que l'on peut aussi bien remplacer $E^T_{Q,R,w,w'}$ par $mes(A_{\tilde{G}}(F)_c)^{-1}E^T_{\star;Q,R,w,w'}$. L'expression ci-dessus est alors remplacée par

$$mes(A_{\tilde{G}}(F)_c)^{-1}\sum_{Q=LU_Q,R;P_0\subset Q\subset R}\sum_{w\in W^G(L|S),w'\in W^G(L|S')} s^R_Q(w,w')$$

$$\sum_{t\in W^G(M_{disc}|M'_{disc})\cap w^{-1}W^Lw'}\sum_{\nu\in[t\sigma',\omega\sigma]}\mathbf{E}^T_{w^{-1}(Q),w^{-1}(R),t,\nu}.$$

Comme on l'a remarqué en 3.18, pour $Q,...,t$ intervenant ci-dessus, on a l'égalité $s^R_Q(w,w')=s^{w^{-1}(R)}_{w^{-1}(Q)}(t)$. On peut donc récrire l'expression précédente sous la forme

$$mes(A_{\tilde{G}}(F)_c)^{-1}\sum_{t\in W(M_{disc}|M'_{disc})}\sum_{\nu\in[t\sigma',\omega\sigma]}E^T_{\star;t,\nu},$$

où

$$E^T_{\star;t,\nu}=\sum_{Q=LU_Q,R;P_0\subset Q\subset R}\sum_{w\in W^G(L|S),w'\in W^G(L|S');t\in w^{-1}W^Lw'} s^{w^{-1}(R)}_{w^{-1}(Q)}(t)\mathbf{E}^T_{w^{-1}(Q),w^{-1}(R),t,\nu}.$$

Fixons $t$ et $\nu$. Pour tous $Q,R$ et tout $w\in W^G(L|S)$ il y a un et un seul $w'\in W^G(L|S')$ tel que $t\in w^{-1}W^Lw'$ : en identifiant tous ces éléments à des relèvements dans $W^G$, $w'$ est l'élément de longueur minimale dans la classe $W^Lwt$. On peut donc supprimer la somme en $w'$ et la condition $t\in w^{-1}W^Lw'$. L'application

$$\begin{array}{ccc}\{Q=LU_Q,R,w;P_0\subset Q\subset R,w\in W^G(L|S)\} & \to & \{Q',R';M_{disc}\subset Q'\subset R'\}\\ (Q,R,w) & \mapsto & (w^{-1}(Q),w^{-1}(R))\end{array}$$

est bijective. On voit alors que $E^T_{\star;t,\nu}=\mathbf{E}^T_{t,\nu}$. Cela démontre le lemme. $\square$

Dans toutes nos expressions intervient la fonction $B$ fixée en 3.4. Il peut être utile de préciser la dépendance en $B$ de la majoration du lemme. Pour cela, notons pour quelques instants $j^T(B)$ et $\mathbf{E}^T(B)$ les termes notés précédemment $j^T$ et $\mathbf{E}^T$. Introduisons un ensemble $\mathcal{N}$ de semi-normes sur l'espace des fonctions de Schwartz sur $i\mathcal{A}^*_{M_{disc},F}$. Dans le cas où $F$ est non-archimédien, ces semi-normes sont

$$B\mapsto sup\{|(XB)(\lambda)|;\lambda\in i\mathcal{A}^*_{M_{disc},F}\},$$

où $X$ parcourt les opérateurs différentiels à coefficients constants sur $i\mathcal{A}^*_{M_{disc}}$. Dans le cas où $F$ est archimédien, ce sont les

$$B\mapsto sup\{|(XB)(\lambda)|(1+|\lambda|)^N;\lambda\in i\mathcal{A}^*_{M_{disc}}\},$$

où $X$ parcourt les mêmes opérateurs que ci-dessus et $N$ parcourt les entiers naturels. Le lemme se précise en

(1) pour tout réel $r\geq 1$, il existe $c_r>0$ et un sous-ensemble fini $\mathcal{N}_r\subset\mathcal{N}$ de sorte que l'on ait la majoration

$$|j^T(B)-mes(A_{\tilde{G}}(F)_c)^{-1}\mathbf{E}^T(B)|\leq c_r sup\{\underline{n}(B);\underline{n}\in\mathcal{N}_r\}|T|^{-r}$$

pour tout $T$ et toute fonction de Schwartz $B$ sur $i\mathcal{A}^*_{M_{disc},F}$.

Il suffit de reprendre patiemment toutes nos majorations. A chaque fois que $B$ y intervient, c'est par l'intermédiaire d'une semi-norme appartenant à l'ensemble $\mathcal{N}$ et il est clair que, pour $r$ fixé, il n'y a qu'un nombre fini de telles semi-normes qui interviennent.

## 3.20 Un lemme d'inversion de Fourier

Dans ce paragraphe et jusqu'en 3.23, on fixe un élement $t\in W^G(M_{disc}|M'_{disc})$ et un élément $\nu\in[t\sigma',\omega\sigma]$. On définit un Levi $M_t$ : c'est le plus grand Levi contenant $M_{disc}$ tel que $\mathcal{A}_{M_t}$ contienne l'ensemble

$$\{H\in\mathcal{A}_{M_{disc}};t\theta^{-1}H=H\}.$$

On pose $\tilde{M}_t=M_t\gamma_0t^{-1}$, où on relève $t$ en un élément de $G$. D'après 2.1(3) et (5), $\tilde{M}_t$ est un ensemble de Levi et l'ensemble des espaces paraboliques $\tilde{P}$ tels que $M_{disc}\subset P$ et $t\theta^{-1}(P)=P$ n'est autre que $\mathcal{F}(\tilde{M}_t)$.

Considérons l'ensemble des couples $(\lambda,\Lambda)\in i\mathcal{A}^*_{M_{disc}}\times i\mathcal{A}^*_{\tilde{M}_t}$ tels que $\Lambda-\lambda+t\lambda'-\nu\in i\mathcal{A}^\vee_{M_{disc},F}$. Il est invariant par translation par $(i\mathcal{A}^\vee_{M_{disc},F}+i\mathcal{A}^*_{\tilde{M}_t})\times i\mathcal{A}^\vee_{\tilde{M}_t,F}$. Considérons son quotient par l'action de ce groupe. Parce que $1-t\theta^{-1}$ se restreint en un automorphisme de $i\mathcal{A}^{\tilde{M}_t,*}_{M_{disc}}$, on voit que ce quotient est fini, réduit à un élément si $F$ est archimédien. On voit aussi que la projection $(\lambda,\Lambda)\to\lambda$ est injective. Autrement dit, si on note $\{\nu\}_t$ l'image de cette projection, il existe une application $\lambda\mapsto\Lambda(\lambda)$ de $\{\nu\}_t$ dans $i\mathcal{A}^*_{\tilde{M}_t,F}$ de sorte que le quotient ci-dessus soit égal à $\{(\lambda,\Lambda(\lambda));\lambda\in\{\nu\}_t\}$.

**Lemme**. *Soit $f$ une fonction de Schwartz sur $i\mathcal{A}^*_{M_{disc},F}$ et soit $X\in\mathcal{A}_{\tilde{M}_t,F}$. L'intégrale*

$$mes(i\mathcal{A}^*_{M_{disc},F})^{-1}\int_{\mathcal{A}^{\tilde{M}_t}_{M_{disc},F}(X)}\int_{i\mathcal{A}^*_{M_{disc},F}}e^{<\lambda-t\lambda'+\nu,Y>}f(\lambda)\,d\lambda\,dY$$

*est convergente dans cet ordre. Elle est égale à*

$$mes(i\mathcal{A}^*_{\tilde{M}_t,F})^{-1}|det((1-t\theta^{-1})_{|\mathcal{A}^{\tilde{M}_t,*}_{M_{disc}}})|^{-1}\sum_{\lambda\in\{\nu\}_t}e^{<\Lambda(\lambda),X>}\int_{i\mathcal{A}^*_{\tilde{M}_t,F}}f(\lambda+\xi)\,d\xi.$$

Preuve. On suppose $F$ non-archimédien, le cas archimédien étant plus simple. On fixe un relèvement de $\nu$ dans $i\mathcal{A}^*_{M_{disc}}$, que l'on note encore $\nu$. On fixe $\mu\in i\mathcal{A}^*_{M_{disc}}$ tel que $\nu^{\tilde{M}_t}=t\theta^{-1}\mu-\mu$. On fixe $X'\in\mathcal{A}_{M_{disc},F}$ tel que $(X')^{\tilde{M}_t}=X$. On a $\mathcal{A}^{\tilde{M}_t}_{M_{disc},F}(X)=X'+\mathcal{A}^{\tilde{M}_t}_{M_{disc},F}$ (où $\mathcal{A}^{\tilde{M}_t}_{M_{disc},F}=\mathcal{A}_{M_{disc},F}\cap\mathcal{A}^{\tilde{M}_t}_{M_{disc}}$) et l'intégrale de l'énoncé se récrit

$$mes(i\mathcal{A}^*_{M_{disc},F})^{-1}\sum_{Y\in\mathcal{A}^{\tilde{M}_t}_{M_{disc},F}}e^{<\nu_{\tilde{M}_t},X'>}\int_{i\mathcal{A}^*_{M_{disc},F}}e^{<(\lambda-\mu)-t\theta^{-1}(\lambda-\mu),Y+X'>}f(\lambda)\,d\lambda.$$

Toutes les intégrations se font sur des groupes compacts. Une intégrale sur $i\mathcal{A}^*_{M_{disc},F}$ se décompose en le produit d'une intégrale sur $i\mathcal{A}^*_{M_{disc}}/(i\mathcal{A}^\vee_{M_{disc},F}+i\mathcal{A}^*_{\tilde{M}_t})$ et d'une intégrale sur $i\mathcal{A}^*_{\tilde{M}_t,F}$ (avec des pondérations provenant de nos choix de mesures). L'expression ci-dessus se transforme en

$$(1)\qquad mes(i\mathcal{A}^*_{M_{disc},F})^{-1}mes(i\mathcal{A}^*_{\tilde{M}_t,F})\sum_{Y\in\mathcal{A}^{\tilde{M}_t}_{M_{disc},F}}e^{<\nu_{\tilde{M}_t},X'>}$$

$$\int_{i\mathcal{A}^*_{M_{disc}}/(i\mathcal{A}^\vee_{M_{disc},F}+i\mathcal{A}^*_{\tilde{M}_t})}e^{<(\lambda-\mu)-t\theta^{-1}(\lambda-\mu),Y+X'>}f'(\lambda)\,d\lambda,$$

où

$$f'(\lambda)=mes(i\mathcal{A}^*_{\tilde{M}_t,F})^{-1}\int_{i\mathcal{A}^*_{\tilde{M}_t,F}}f(\lambda+\xi)\,d\xi.$$

La fonction $f'$ est lisse sur $i\mathcal{A}^*_{M_{disc}}/(i\mathcal{A}^\vee_{M_{disc},F}+i\mathcal{A}^*_{\tilde{M}_t})$. L'accouplement

$$\begin{array}{ccc}(i\mathcal{A}^*_{M_{disc}}/(i\mathcal{A}^\vee_{M_{disc},F}+i\mathcal{A}^*_{\tilde{M}_t}))\times\mathcal{A}^{\tilde{M}_t}_{M_{disc},F} & \to & \mathbb{C}^\times\\ (\lambda,Y) & \mapsto & e^{<\lambda-t\theta^{-1}\lambda,Y>}\end{array}$$

n'est pas parfait. Son noyau $\mathcal{K}$ est l'ensemble des $\lambda\in i\mathcal{A}^*_{M_{disc}}/(i\mathcal{A}^\vee_{M_{disc},F}+i\mathcal{A}^*_{\tilde{M}_t})$ tels que $\lambda-t\theta^{-1}\lambda\in i\mathcal{A}^\vee_{M_{disc},F}+i\mathcal{A}^*_{\tilde{M}_t}$. A ce défaut près, la formule (1) est une inversion de Fourier. Elle est donc convergente dans l'ordre indiqué. On la calcule selon la formule usuelle. Elle vaut

$$|\mathcal{K}|^{-1}e^{<\nu_{\tilde{M}_t},X'>}\sum_{\lambda\in\mu+\mathcal{K}}e^{<(\lambda-\mu)-t\theta^{-1}(\lambda-\mu),X'>}f'(\lambda).$$

Notons $p:i\mathcal{A}^*_{M_{disc}}\to i\mathcal{A}^{\tilde{M}_t,*}_{M_{disc}}$ la projection orthogonale. Via cette projection, on vérifie que $\mathcal{K}$ s'identifie au noyau de $1-t\theta^{-1}$ agissant dans $i\mathcal{A}^{\tilde{M}_t,*}_{M_{disc}}/p(i\mathcal{A}^\vee_{M_{disc},F})$. Donc $|\mathcal{K}|=|det((1-t\theta^{-1})_{|\mathcal{A}^{\tilde{M}_t,*}_{M_{disc}}})|$. D'autre part, en comparant les définitions, on voit que $\mu+\mathcal{K}=\{\nu\}_t$. Notre expression vaut donc

$$(2)\qquad |det((1-t\theta^{-1})_{|\mathcal{A}^{\tilde{M}_t,*}_{M_{disc}}})|^{-1}e^{<\nu_{\tilde{M}_t},X'>}\sum_{\lambda\in\{\nu\}_t}e^{<(\lambda-\mu)-t\theta^{-1}(\lambda-\mu),X'>}f'(\lambda).$$

Pour $\lambda \in \{\nu\}_t$, on introduit comme ci-dessus $\Lambda(\lambda) \in \mathcal{A}^*_{\tilde{M}_t,F}$ tel que $\Lambda(\lambda) - \lambda + t\lambda' - \nu \in i\mathcal{A}^\vee_{M_{disc},F}$, ou encore $\Lambda(\lambda) - \lambda + \mu + t\theta^{-1}(\lambda - \mu) - \nu_{\tilde{M}_t} \in i\mathcal{A}^\vee_{M_{disc},F}$. Puisque $X' \in \mathcal{A}_{M_{disc},F}$, on a

$$e^{<(\lambda-\mu)-t\theta^{-1}(\lambda-\mu),X'>} = e^{<\Lambda(\lambda)-\nu_{\tilde{M}_t},X'>},$$

d'où

$$e^{<\nu_{\tilde{M}_t},X'>}e^{<(\lambda-\mu)-t\theta^{-1}(\lambda-\mu),X'>} = e^{<\Lambda(\lambda),X'>} = e^{<\Lambda(\lambda),X>}.$$

L'expression (2) se transforme en celle de l'énoncé. $\square$

## 3.21 Transformation de $\mathbf{E}^T_{t,\nu}$

Dans la définition de $\mathbf{E}^T_{t,\nu}$ intervient la $(G, M_{disc})$-famille $(\phi(t,\nu;\lambda,\Lambda,S''))_{S''\in\mathcal{P}(M_{disc})}$ de 3.16. Les fonctions qui composent celle-ci ont le défaut d'avoir des singularités et, quand $F$ est archimédien, de ne pas être de Schwartz en $\Lambda$ : elles sont seulement à croissance modérée. Modifions cette famille. On fixe une fonction $C$ sur $i\mathcal{A}^*_{M_{disc},F}$, qui est $C^\infty$ et à support compact et telle que $C(0) = 1$. On pose

$$\phi_\star(t,\nu;\lambda,\Lambda,S'') = r_{\bar{S}|S}(\sigma_{t\lambda'-\nu+\Lambda})^{-1}r_{\bar{S}|S}(\sigma_\lambda)C(\Lambda - \lambda' + t\lambda' - \nu)B(\lambda)\phi(t,\nu;\lambda,\Lambda,S'').$$

On a aussi

$$\phi_\star(t,\nu;\lambda,\Lambda,S'') = \epsilon(t,\nu;\lambda)C(\Lambda - \lambda' + t\lambda' - \nu)B(\lambda)\phi_{reg}(t,\nu;\lambda,\Lambda,S'').$$

Les lemmes 1.6 et 3.16(ii) montrent que $\phi_\star(t,\nu;\lambda,\Lambda,S'')$ est $C^\infty$ en les deux variables $\lambda, \Lambda \in i\mathcal{A}^*_{M_{disc},F}$. Les propriétés de $B$ et $C$ assurent qu'elle est de Schwartz en ces deux variables. D'après le lemme 3.16(iii), on a l'égalité

$$\phi^{Q,T}_{\star,M_{disc}}(t,\nu,X;\lambda,\lambda - t\lambda' + \nu) = B(\lambda)\phi^{Q,T}_{M_{disc}}(t,\nu,X;\lambda,\lambda - t\lambda' + \nu)$$

pour tout $Q = LU_Q \in \mathcal{F}(M_{disc})$ et tout $X \in \mathcal{A}_{L,F}$. La définition de $\mathbf{E}^T_{t,\nu}$ se récrit

$$\mathbf{E}^T_{t,\nu} = mes(i\mathcal{A}^*_{M_{disc},F})^{-1} \sum_{Q=LU_Q\in\mathcal{F}(M_{disc})} \int_{\mathcal{A}_{L,F}\backslash\mathcal{A}_{A_{\tilde{G}},F}} S_Q(t; X - T[Q])$$

$$\int_{i\mathcal{A}^*_{M_{disc},F}} \phi^{Q,T}_{\star,M_{disc}}(t,\nu,X;\lambda,\lambda - t\lambda' + \nu)\, d\lambda\, dX.$$

En utilisant le lemme 1.8, on peut écrire

$$\phi^{Q,T}_{\star,M_{disc}}(t,\nu,X;\lambda,\lambda - t\lambda' + \nu) = \sum_{Q'=L'U_{Q'};M_{disc}\subset Q'\subset Q} \int_{\mathcal{A}_{L',F}} \int_{\mathcal{A}^L_{M_{disc},F}(X+H_L)}$$

$$\delta^{Q'}_{M_{disc}}(H')\Gamma^Q_{Q'}(H', H + T[Q'])\hat{\phi}_\star(t,\nu;\lambda,H,Q')e^{<\lambda-t\lambda'+\nu,H'>}\, dH'\, dH,$$

où

$$\hat{\phi}_\star(t,\nu;\lambda,H,Q') = mes(i\mathcal{A}^*_{L',F})^{-1} \int_{i\mathcal{A}^*_{L',F}} \phi_\star(t,\nu;\lambda,\Lambda,Q')e^{-<\Lambda,H>}\, d\Lambda.$$

Fixons $Q, Q' \in \mathcal{F}(M_{disc})$, avec $Q' \subset Q$.

**Lemme**. *(i) Pour $X \in \mathcal{A}_{L,F}$, l'intégrale*

$$\int_{i\mathcal{A}^*_{M_{disc},F}} \int_{\mathcal{A}_{L',F}} \int_{\mathcal{A}^L_{M_{disc},F}(X+H_L)}$$

$$|\delta^{Q'}_{M_{disc}}(H')\Gamma^Q_{Q'}(H', H+T[Q'])\hat{\phi}_\star(t,\nu;\lambda,H,Q')|\, dH'\, dH\, d\lambda$$

*est convergente.*

*(ii) L'intégrale*

$$\int_{\mathcal{A}_{L,F}\backslash\mathcal{A}_{\mathcal{A}_{\tilde{G}},F}} \int_{\mathcal{A}_{L',F}} \int_{\mathcal{A}^L_{M_{disc},F}(X+H_L)} \Big|\delta^{Q'}_{M_{disc}}(H')S_Q(t;X-T[Q])\Gamma^Q_{Q'}(H', H+T[Q'])$$

$$\int_{i\mathcal{A}^*_{M_{disc},F}} \hat{\phi}_\star(t,\nu;\lambda,H,Q')e^{<\lambda-t\lambda'+\nu,H'>}\, d\lambda\Big|\, dH'\, dH\, dX$$

*est convergente.*

Preuve de (i). Les deux conditions $\delta^{Q'}_{M_{disc}}(H')\Gamma^Q_{Q'}(H', H+T[Q'])=1$ et $H' \in \mathcal{A}^L_{M_{disc},F}(X+H_L)$ entraînent une majoration $|H'| << 1+|H|$, les éléments $T$ et $X$ étant ici considérés comme constants. L'intégrale en $H'$ est donc convergente et est essentiellement bornée par $(1+|H|)^D$ pour un certain entier $D$. Puisque $\phi_\star(t,\nu;\lambda,\Lambda,Q')$ est de Schwartz en les deux variables $\lambda$ et $\Lambda$, $\hat{\phi}_\star(t,\nu;\lambda,H,Q')$ est de Schwartz en les deux variables $\lambda$ et $H$. Alors l'intégrale

$$\int_{i\mathcal{A}^*_{M_{disc},F}} \int_{\mathcal{A}_{L',F}} (1+|H|)^D |\hat{\phi}_\star(t,\nu;t\lambda'-\nu,H,Q')|\, dH\, d\lambda$$

est convergente, ce qui prouve (i).

Preuve de (ii). L'intégrale intérieure en $\lambda$ est le produit de $e^{<\nu,H'>}$, qui est de valeur absolue 1, et de la transformée de Fourier en $\lambda$ de $\hat{\phi}_\star(t,\nu;\lambda,H,Q')$, évaluée au point $(\theta t^{-1}-1)H'$. Puisque $\hat{\phi}_\star(t,\nu;\lambda,H,Q')$ est de Schwartz en $\lambda$ et $H$, on peut fixer des fonctions de Schwartz $h$ sur $\mathcal{A}_{L',F}$ et $h'$ sur $\mathcal{A}_{M_{disc},F}$, à valeurs positives, de sorte que la valeur absolue de cette intégrale intérieure soit majorée par $h'((\theta t^{-1}-1)H')h(H)$. Les conditions $H' \in \mathcal{A}^L_{M_{disc},F}(X+H_L)$ et $\delta^{Q'}_{M_{disc}}(H')=1$ entraînent que $H' = X+H_L+(H')^L_{L'}$. La condition $\Gamma^Q_{Q'}(H', H+T[Q'])$ implique une majoration $|(H')^L_{L'}| << 1+|H^L|$, l'élément $T$ étant considéré comme constant. On en déduit

$$(\theta t^{-1}-1)H' = (\theta t^{-1}-1)X + Y(H'),$$

avec $|Y(H')| << 1+|H|$. D'autre part, on a une majoration

$$1+|U+V| >> (1+|U|)(1+|V|)^{-1}$$

pour tous $U, V \in \mathcal{A}_{M_{disc}}$. Pour tout réel $r>0$, on a une majoration

$$h'((\theta t^{-1}-1)H') << (1+|(\theta t^{-1}-1)H'|)^{-r}.$$

En utilisant les majorations précédentes, on obtient

$$h'((\theta t^{-1}-1)H') << (1+|(\theta t^{-1}-1)X|)^{-r}(1+|H|)^r.$$

A ce point, on a montré que l'expression du (ii) de l'énoncé était majorée par

$$\int_{\mathcal{A}_{L,F}/\mathcal{A}_{A_{\tilde{G}},F}}\int_{\mathcal{A}_{L',F}}\int_{\mathcal{A}^L_{M_{disc},F}(X+H_L)}|\delta^{Q'}_{M_{disc}}(H')S_Q(t;X-T[Q])\Gamma^Q_{Q'}(H',H+T[Q'])|$$

$$(1+|(\theta t^{-1}-1)X|)^{-r}(1+|H|)^r h(H)\,dH'\,dH\,dX.$$

Par des raisonnements déjà faits, l'intégrale en $H'$ est convergente et essentiellement majorée par $(1+|H|)^D$ pour un certain entier $D$. L'intégrale en $H$ est convergente quel que soit $r$ puisque $h$ est de Schwartz. L'expression ci-dessus est donc essentiellement majorée par

$$\int_{\mathcal{A}_{L,F}/\mathcal{A}_{A_{\tilde{G}},F}}|S_Q(t;X-T[Q])|(1+|(\theta t^{-1}-1)X|)^{-r}\,dX.$$

Il reste à montrer que l'on peut choisir $r$ tel que cette intégrale soit convergente. En revenant à la définition de $S_Q(t;X)$, on voit qu'il suffit de fixer un sous-groupe parabolique $R$ tel que $Q\subset R$ et $s^R_Q(t)\neq 0$ et de prouver la même assertion pour l'intégrale

$$\int_{\mathcal{A}_{L,F}/\mathcal{A}_{A_{\tilde{G}},F}}\tilde{\sigma}^R_Q(X-T[Q])(1+|(\theta t^{-1}-1)X|)^{-r}\,dX.$$

Or il résulte de 3.17(1) que, pour $\tilde{\sigma}^R_Q(X-T[Q])=1$, on a une majoration

$$1+|X^{\tilde{G}}|<<1+|(\theta t^{-1}-1)X|.$$

L'intégrale ci-dessus est donc essentiellement majorée par

$$\int_{\mathcal{A}_{L,F}/\mathcal{A}_{A_{\tilde{G}},F}}(1+|X^{\tilde{G}}|)^{-r}\,dX.$$

Pour $r$ assez grand, ceci est convergent. $\square$

Ce lemme nous autorise à récrire $\mathbf{E}^T_{t,\nu}$ sous la forme

$$(1)\qquad \mathbf{E}^T_{t,\nu}=mes(i\mathcal{A}^*_{M_{disc},F})^{-1}\sum_{Q=LU_Q,Q'=L'U_{Q'}\in\mathcal{F}(M_{disc});Q'\subset Q}\int_{\mathcal{A}_{L,F}/\mathcal{A}_{A_{\tilde{G}},F}}$$

$$\int_{\mathcal{A}_{L',F}}\int_{\mathcal{A}^L_{M_{disc},F}(X+H_L)}\delta^{Q'}_{M_{disc}}(H')S_Q(t;X-T[Q])\Gamma^Q_{Q'}(H',H+T[Q'])$$

$$\int_{i\mathcal{A}^*_{M_{disc},F}}e^{<\lambda-t\lambda'+\nu,H'>}\hat{\phi}_\star(t,\nu;\lambda,H,Q')\,d\lambda\,dH'\,dH\,dX,$$

où on peut permuter librement la somme en $Q$, $Q'$ et les trois premières intégrales.

## 3.22 Calcul de $\mathbf{E}^T_{t,\nu}$

On a défini en 3.16 une $(G,M)$-famille $(\phi_{reg}(t,\nu;\lambda,\Lambda,S'))_{S'\in\mathcal{P}(M_{disc})}$. Il s'en déduit une $(\tilde{G},\tilde{M}_t)$-famille $(\phi_{reg}(t,\nu;\lambda,\Lambda,\tilde{P}))_{\tilde{P}\in\mathcal{P}(\tilde{M}_t)}$, cf. 2.3 . Les éléments $\lambda$ et $\Lambda$ appartiennent ici à $i\mathcal{A}^*_{M_{disc},F}$ et $i\mathcal{A}^*_{\tilde{M}_t,F}$, $\lambda$ jouant un rôle de paramètre. Pour $X\in\mathcal{A}_{\tilde{G},F}$, on construit la fonction

$$\phi^{\tilde{G},T}_{reg,\tilde{M}_t}(t,\nu,X;\lambda,\Lambda)=\sum_{\tilde{P}\in\mathcal{P}(\tilde{M}_t)}\phi_{reg}(t,\nu;\lambda,\Lambda,\tilde{P})\epsilon^{\tilde{G},T[\tilde{P}]}_{\tilde{P}}(X;\Lambda).$$

C'est une fonction lisse en $\lambda$ et $\Lambda$. Si $F$ est archimédien, toutes ses dérivées sont à croissance modérée.

**Proposition**. *On a l'égalité*

$$\mathbf{E}^T_{t,\nu}=mes(i\mathcal{A}^*_{\tilde{M}_t,F})^{-1}|det((1-t\theta^{-1})_{|\mathcal{A}^{\tilde{M}_t,*}_{M_{disc}}})|^{-1}\sum_{\lambda\in\{\nu\}_t}\sum_{X\in\mathcal{A}_{\tilde{G},F}/\mathcal{A}_{A_{\tilde{G},F}}}$$

$$\int_{i\mathcal{A}^*_{\tilde{M}_t,F}}B(\lambda+\xi)\epsilon(t,\nu;\lambda+\xi)\phi^{\tilde{G},T}_{reg,\tilde{M}_t}(t,\nu,X;\lambda+\xi,\Lambda(\lambda))\,d\xi.$$

**Remarque.** On vérifie que, pour $\lambda$ intervenant ci-desus, on a $e^{<\Lambda(\lambda),Z>}=1$ pour tout $Z\in\mathcal{A}_{A_{\tilde{G}},F}$. La fonction que l'on somme en $X$ est donc bien invariante par $\mathcal{A}_{A_{\tilde{G}},F}$.

Preuve. On part de la formule (1) du paragraphe précédent. Permutons les intégrales en $X$ et $H$. Effectuons ensuite le changement de variables $X\mapsto X-H_L$. L'intégrale en $H'$ devient une intégrale sur $\mathcal{A}^L_{M_{disc},F}(X)$. La composition de l'intégrale en $X$ et de cette intégrale en $H'$ devient une unique intégrale en $X\in\mathcal{A}_{M_{disc},F}/\mathcal{A}_{A_{\tilde{G}},F}$. Cela conduit à l'égalité

$$\mathbf{E}^T_{t,\nu}=mes(i\mathcal{A}^*_{M_{disc},F})^{-1}\sum_{Q=LU_Q,Q'=L'U_{Q'}\in\mathcal{F}(M_{disc});Q'\subset Q}\int_{\mathcal{A}_{L',F}}\int_{\mathcal{A}_{M_{disc},F}/\mathcal{A}_{A_{\tilde{G}},F}}\delta^{Q'}_{M_{disc}}(X)$$

$$S_Q(t;X-H_L-T[Q])\Gamma^Q_{Q'}(X,H+T[Q'])\int_{i\mathcal{A}^*_{M_{disc},F}}e^{<\lambda-t\lambda'+\nu,X>}\hat{\phi}_\star(t,\nu;\lambda,H,Q')\,d\lambda\,dX\,dH.$$

On peut toujours permuter librement les sommes en $Q$ et $Q'$ et les deux premières intégrales, d'où

$$\mathbf{E}^T_{t,\nu}=mes(i\mathcal{A}^*_{M_{disc},F})^{-1}\int_{\mathcal{A}_{M_{disc},F}/\mathcal{A}_{A_{\tilde{G}},F}}\sum_{Q'=L'U_{Q'}\in\mathcal{F}(M_{disc})}\int_{\mathcal{A}_{L',F}}\delta^{Q'}_{M_{disc}}(X)\sum_{Q=LU_Q;Q'\subset Q}$$

$$S_Q(t;X-H_L-T[Q])\Gamma^Q_{Q'}(X,H+T[Q'])\int_{i\mathcal{A}^*_{M_{disc},F}}e^{<\lambda-t\lambda'+\nu,X>}\hat{\phi}_\star(t,\nu;\lambda,H,Q')\,d\lambda\,dH\,dX.$$

Fixons $Q'$. En se reportant à la définition de $S_Q(t,X)$ et en utilisant 3.20(3), on a l'égalité

$$\sum_{Q=LU_Q;Q'\subset Q}S_Q(t;X-H_L-T[Q])\Gamma^Q_{Q'}(X,H+T[Q'])=$$

$$\sum_{\tilde{P}\in\mathcal{F}(\tilde{M}_t);Q'\subset P}(-1)^{a_{\tilde{P}}-a_{\tilde{G}}}\hat{\tau}_{\tilde{P}}(X-H-T[\tilde{P}])\sum_{Q=LU_Q;Q'\subset Q\subset P}\tau^P_Q(X-H-T[Q])\Gamma^Q_{Q'}(X,H+T[Q']).$$

D'après 1.3(4), la dernière somme en $Q$ vaut $\tau_{Q'}^{P}(X)$. D'où

$$\mathbf{E}_{t,\nu}^{T} = \int_{\mathcal{A}_{M_{disc},F}/\mathcal{A}_{A_{\tilde{G}},F}} \mathbf{E}_{t,\nu}^{T}(X)\, dX,$$

où

$$\mathbf{E}_{t,\nu}^{T}(X) = mes(i\mathcal{A}_{M_{disc},F}^{*})^{-1} \sum_{Q'=L'U_{Q'}\in\mathcal{F}(M_{disc})} \int_{\mathcal{A}_{L',F}} \delta_{M_{disc}}^{Q'}(X) \sum_{\tilde{P}=\tilde{M}U_P\in\mathcal{F}(\tilde{M}_t);Q'\subset P}$$

$$(-1)^{a_{\tilde{P}}-a_{\tilde{G}}}\hat{\tau}_{\tilde{P}}(X-H-T[\tilde{P}])\tau_{Q'}^{P}(X) \int_{i\mathcal{A}_{M_{disc},F}^{*}} e^{<\lambda-t\lambda'+\nu,X>}\hat{\phi}_{\star}(t,\nu;\lambda,H,Q')\, d\lambda\, dH.$$

Fixons $X$. Puisque $\hat{\phi}_{\star}(t,\nu;\lambda,H,Q')$ est de Schwartz en $\lambda$ et $H$, l'expression $\mathbf{E}_{t,\nu}^{T}(X)$ est absolument convergente. On peut donc écrire

$$\mathbf{E}_{t,\nu}^{T}(X) = mes(i\mathcal{A}_{M_{disc},F}^{*})^{-1} \int_{i\mathcal{A}_{M_{disc},F}^{*}} e^{<\lambda-t\lambda'+\nu,X>}\mathbf{E}_{t,\nu}^{T}(X,\lambda)\, d\lambda,$$

où

$$\mathbf{E}_{t,\nu}^{T}(X,\lambda) = \sum_{Q'=L'U_{Q'}\in\mathcal{F}(M_{disc})} \int_{\mathcal{A}_{L',F}} \delta_{M_{disc}}^{Q'}(X) \sum_{\tilde{P}=\tilde{M}U_P\in\mathcal{F}(\tilde{M}_t);Q'\subset P} (-1)^{a_{\tilde{P}}-a_{\tilde{G}}}\hat{\tau}_{\tilde{P}}(X-H-T[\tilde{P}])$$

$$\tau_{Q'}^{P}(X)\hat{\phi}_{\star}(t,\nu;\lambda,H,Q')\, dH.$$

Fixons $\lambda$. On peut permuter les sommes en $\tilde{P}$ et en $Q'$, puis décomposer l'intégrale en $H \in \mathcal{A}_{L',F}$ en une intégrale sur $H \in \mathcal{A}_{\tilde{M},F}$ et une intégrale en $H' \in \mathcal{A}_{L',F}^{\tilde{M}}(H)$ et on peut permuter la première avec la somme en $Q'$ On obtient

$$\mathbf{E}_{t,\nu}^{T}(X,\lambda) = \sum_{\tilde{P}=\tilde{M}U_P\in\mathcal{F}(\tilde{M}_t)} (-1)^{a_{\tilde{P}}-a_{\tilde{G}}} \int_{\mathcal{A}_{\tilde{M},F}} \hat{\tau}_{\tilde{P}}(X-H-T[\tilde{P}])$$

$$\sum_{Q'=L'U_{Q'};M_{disc}\subset Q'\subset P} \delta_{M_{disc}}^{Q'}(X)\tau_{Q'}^{P}(X) \int_{\mathcal{A}_{L',F}^{\tilde{M}}(H)} \hat{\phi}_{\star}(t,\nu;\lambda,H',Q')\, dH'\, dH.$$

En se rappelant la définition de $\hat{\phi}_{\star}(t,\nu;\lambda,H',Q')$ et par inversion de Fourier partielle, on a

$$\int_{\mathcal{A}_{L',F}^{\tilde{M}}(H)} \hat{\phi}_{\star}(t,\nu;\lambda,H',Q')\, dH' = mes(i\mathcal{A}_{\tilde{M},F})^{-1} \int_{i\mathcal{A}_{\tilde{M},F}^{*}} \phi_{\star}(t,\nu;\lambda,\Lambda,Q')e^{-<\Lambda,H>}\, d\Lambda.$$

Puisque $\Lambda$ ne parcourt plus que $i\mathcal{A}_{\tilde{M},F}^{*}$, on peut aussi bien remplacer $\phi_{\star}(t,\nu;\lambda,\Lambda,Q')$ par $\phi_{\star}(t,\nu;\lambda,\Lambda,\tilde{P})$ et l'expression ci-dessus est égale à $\hat{\phi}_{\star}(t,\nu;\lambda,H,\tilde{P})$. Notons que $Q'$ a ici disparu donc, dans l'expression précédente de $\mathbf{E}_{\nu,t}^{T}$, la somme en $Q'$ n'est plus que

$$\sum_{Q';M_{disc}\subset Q'\subset P} \delta_{M_{disc}}^{Q'}(X)\tau_{Q'}^{P}(X).$$

Celle-ci est égale à

$$\sum_{\tilde{P}';\tilde{M}_t\subset\tilde{P}'\subset\tilde{P}} \delta_{\tilde{M}_t}^{\tilde{P}'}(X)\tau_{\tilde{P}'}^{\tilde{P}}(X).$$

En effet, les deux expressions sont égales à 1 d'après 1.3(1) et sa variante tordue. On obtient

$$\mathbf{E}^T_{t,\nu}(X,\lambda)=\sum_{\tilde{P}=\tilde{M}U_P\in\mathcal{F}(\tilde{M}_t)}(-1)^{a_{\tilde{P}}-a_{\tilde{G}}}\int_{\mathcal{A}_{\tilde{M},F}}\hat{\tau}_{\tilde{P}}(X-H-T[\tilde{P}])$$
$$\sum_{\tilde{P}'=\tilde{M}'U_{P'};\tilde{M}_t\subset\tilde{P}'\subset\tilde{P}}\delta^{\tilde{P}'}_{\tilde{M}_t}(X)\tau^{\tilde{P}}_{\tilde{P}'}(X)\hat{\phi}_\star(t,\nu;\lambda,H,\tilde{P})\,dH.$$

On remonte maintenant le calcul ci-dessus : on permute les sommes en $\tilde{P}$ et $\tilde{P}'$ ; on remplace $\hat{\phi}_\star(t,\nu;\lambda,H,\tilde{P})$ par l'expression égale

$$\int_{\mathcal{A}^{\tilde{M}}_{\tilde{M}',F}(H)}\hat{\phi}_\star(t,\nu;\lambda,H',\tilde{P}')\,dH';$$

à partir des intégrales en $H\in\mathcal{A}_{\tilde{M},F}$ et $H'\in\mathcal{A}^{\tilde{M}}_{\tilde{M}',F}(H)$, on reconstitue une intégrale en $H\in\mathcal{A}_{\tilde{M}',F}$. On obtient

$$\mathbf{E}^T_{t,\nu}(X,\lambda)=\sum_{\tilde{P}'=\tilde{M}'U_{P'}\in\mathcal{F}(\tilde{M}_t)}\int_{\mathcal{A}_{\tilde{M}',F}}\delta^{\tilde{P}'}_{\tilde{M}_t}(X)$$

$$\sum_{\tilde{P};\tilde{P}'\subset\tilde{P}}(-1)^{a_{\tilde{P}}-a_{\tilde{G}}}\hat{\tau}_{\tilde{P}}(X-H-T[\tilde{P}'])\tau^{\tilde{P}}_{\tilde{P}'}(X)\hat{\phi}_\star(t,\nu;\lambda,H,\tilde{P}')\,dH.$$

Par définition,

$$\sum_{\tilde{P};\tilde{P}'\subset\tilde{P}}(-1)^{a_{\tilde{P}}-a_{\tilde{G}}}\hat{\tau}_{\tilde{P}}(X-H-T[\tilde{P}'])\tau^{\tilde{P}}_{\tilde{P}'}(X)=\Gamma^{\tilde{G}}_{\tilde{P}'}(X,H+T[P']).$$

Cela fait disparaître les $\tilde{P}$ de la formule ci-dessus et nous autorise à abandonner les $'$ des $\tilde{P}'$. D'où

$$\mathbf{E}^T_{t,\nu}(X,\lambda)=\sum_{\tilde{P}=\tilde{M}U_P\in\mathcal{F}(\tilde{M}_t)}\int_{\mathcal{A}_{\tilde{M},F}}\delta^{\tilde{P}}_{\tilde{M}_t}(X)\Gamma^{\tilde{G}}_{\tilde{P}}(X,H+T[\tilde{P}])\hat{\phi}_\star(t,\nu;\lambda,H,\tilde{P})\,dH.$$

Revenons à $\mathbf{E}^T_{t,\nu}$ qui est l'intégrale en $\lambda$ puis $X$ de l'expression ci-dessus, multipliée par $mes(i\mathcal{A}^*_{M_{disc},F})^{-1}e^{<\lambda-t\lambda'+\nu,X>}$. On peut décomposer l'intégrale en $X$ en une intégrale en $X\in\mathcal{A}_{\tilde{M}_t,F}/\mathcal{A}_{A_{\tilde{G}},F}$ et une intégrale en $Y\in\mathcal{A}^{\tilde{M}_t}_{M_{disc},F}(X)$. Remarquons que pour $Y$ dans cet ensemble, on a $\mathbf{E}^T_{t,\nu}(Y,\lambda)=\mathbf{E}^T_{t,\nu}(X,\lambda)$. On a alors

$$\mathbf{E}^T_{t,\nu}=mes(i\mathcal{A}^*_{M_{disc},F})^{-1}\int_{\mathcal{A}_{\tilde{M}_t,F}/\mathcal{A}_{A_{\tilde{G}},F}}\int_{\mathcal{A}^{\tilde{M}_t}_{M_{disc},F}(X)}\int_{i\mathcal{A}^*_{M_{disc},F}}e^{<\lambda-t\lambda'+\nu,Y>}\mathbf{E}^T_{t,\nu}(X,\lambda)\,d\lambda\,dY\,dX.$$

Pour tout $X$, la fonction $\lambda\mapsto\mathbf{E}^T_{t,\nu}(X,\lambda)$ est de Schwartz. La double intégrale intérieure est calculée par le lemme 3.20. On obtient

$$\mathbf{E}^T_{t,\nu}=mes(i\mathcal{A}^*_{\tilde{M}_t,F})^{-1}|det((1-t\theta^{-1})_{|\mathcal{A}^{\tilde{M}_t*}_{M_{disc}}}|^{-1}\int_{\mathcal{A}_{\tilde{M}_t,F}/\mathcal{A}_{A_{\tilde{G}},F}}\sum_{\lambda\in\{\nu\}_t}e^{<\Lambda(\lambda),X>}$$

$$\int_{i\mathcal{A}^*_{\tilde{M}_t,F}}\mathbf{E}^T_{t,\nu}(X,\lambda+\xi)\,d\xi\,dX.$$

En développant le dernier terme, on obtient

$$\mathbf{E}^T_{t,\nu} = mes(i\mathcal{A}^*_{\tilde{M}_t,F})^{-1}|det((1-t\theta^{-1})_{|\mathcal{A}^{\tilde{M}_t*}_{M_{disc}}}|^{-1}\int_{\mathcal{A}_{\tilde{M}_t,F}/\mathcal{A}_{A_{\tilde{G}},F}}\sum_{\lambda\in\{\nu\}_t} e^{<\Lambda(\lambda),X>}\int_{i\mathcal{A}^*_{\tilde{M}_t,F}}$$

$$\sum_{\tilde{P}=\tilde{M}U_P\in\mathcal{F}(\tilde{M}_t)}\int_{\mathcal{A}_{\tilde{M},F}}\delta^{\tilde{P}}_{\tilde{M}_t}(X)\Gamma^{\tilde{G}}_{\tilde{P}}(X,H+T[\tilde{P}])\hat{\phi}_\star(t,\nu;\lambda+\xi,H,\tilde{P})\,dH\,d\xi\,dX.$$

Cette expression est absolument convergente. En effet, pour $\tilde{P}$ fixé, l'intégrale en $X$ est à support compact et est essentiellement bornée par $(1+|H|)^D$ pour un entier $D$ convenable. Les intégrales restantes en $H$ et $\xi$ sont convergentes puisque $\hat{\phi}_\star(t,\nu;\lambda+\xi,H,\tilde{P})$ est de Schwartz en $\xi$ et $H$. On peut donc commencer par intégrer en $\xi$, puis en $H$, puis en $X$. On décompose ensuite l'intégrale en $X$ en une somme sur $X\in\mathcal{A}_{\tilde{G},F}/\mathcal{A}_{A_{\tilde{G}},F}$ d'intégrales en $Y\in\mathcal{A}^{\tilde{G}}_{\tilde{M}_t,F}(X+H_{\tilde{G}})$. Après encore quelques permutations, on obtient

$$\mathbf{E}^T_{t,\nu} = mes(i\mathcal{A}^*_{\tilde{M}_t,F})^{-1}|det((1-t\theta^{-1})_{|\mathcal{A}^{\tilde{M}_t*}_{M_{disc}}}|^{-1}\sum_{\lambda\in\{\nu\}_t}\sum_{X\in\mathcal{A}_{\tilde{G},F}/\mathcal{A}_{A_{\tilde{G}},F}}\int_{i\mathcal{A}^*_{\tilde{M}_t,F}}\sum_{\tilde{P}=\tilde{M}U_P\in\mathcal{F}(\tilde{M}_t)}$$

$$\int_{\mathcal{A}_{\tilde{M},F}}\int_{\mathcal{A}^{\tilde{G}}_{\tilde{M}_t,F}(X+H_{\tilde{G}})} e^{<\Lambda(\lambda),Y>}\delta^{\tilde{P}}_{\tilde{M}_t}(Y)\Gamma^{\tilde{G}}_{\tilde{P}}(Y,H+T[\tilde{P}])\hat{\phi}_\star(t,\nu;\lambda+\xi,H,\tilde{P})\,dY\,dH\,d\xi.$$

L'expression intérieure (somme en $\tilde{P}$ et intégrales en $Y$ et $H$) est calculée par la variante tordue du lemme 1.8. C'est $\phi^{\tilde{G},T}_{\star,\tilde{M}_t}(t,\nu,X;\lambda+\xi,\Lambda(\lambda))$. D'où

$$\mathbf{E}^T_{t,\nu} = mes(i\mathcal{A}^*_{\tilde{M}_t,F})^{-1}|det((1-t\theta^{-1})_{|\mathcal{A}^{\tilde{M}_t*}_{M_{disc}}}|^{-1}\sum_{\lambda\in\{\nu\}_t}\sum_{X\in\mathcal{A}_{\tilde{G},F}/\mathcal{A}_{A_{\tilde{G}},F}}$$

$$\int_{i\mathcal{A}^*_{\tilde{M}_t,F}}\phi^{\tilde{G},T}_{\star,\tilde{M}_t}(t,\nu,X;\lambda+\xi,\Lambda(\lambda))\,d\xi.$$

En revenant aux définitions des fonctions $\phi_{reg}(t,\nu;\lambda,\Lambda,S')$ et $\phi_\star(t,\nu;\lambda,\Lambda,S')$, on voit que la seconde est le produit de la première et de $\epsilon(t,\nu;\lambda)B(\lambda)C(\Lambda-\lambda+t\lambda'-\nu)$. Mais, pour $\lambda\in\{\nu\}_t$ et $\xi\in i\mathcal{A}^*_{\tilde{M}_t,F}$, on a par définition $\Lambda(\lambda)-\lambda-\xi+t\theta^{-1}(\lambda+\xi)-\nu\in i\mathcal{A}^\vee_{M_{disc},F}$. Donc $C(\Lambda(\lambda)-\lambda-\xi+t\theta^{-1}(\lambda+\xi)-\nu)=1$ et

$$\phi^{\tilde{G},T}_{\star,\tilde{M}_t}(t,\nu,X;\lambda+\xi,\Lambda(\lambda)) = B(\lambda+\xi)\epsilon(t,\nu;\lambda+\xi)\phi^{\tilde{G},T}_{reg,\tilde{M}_t}(t,\nu,X;\lambda+\xi,\Lambda(\lambda)).$$

La formule ci-dessus devient celle de l'énoncé. □

## 3.23 Le "terme constant" de $\mathbf{E}^T_{t,\nu}$

Posons

$$j_{spec,t,\nu} = |det((1-t\theta^{-1})_{|\mathcal{A}^{\tilde{M}_t,*}_{M_{disc}}})|^{-1}\sum_{\lambda\in\{\nu\}_t;\Lambda(\lambda)=0}\int_{i\mathcal{A}^*_{\tilde{M}_t,F}} B(\lambda+\xi)\phi^{\tilde{G}}_{reg,\tilde{M}_t}(t,\nu;\lambda+\xi,0)\,d\xi.$$

Cette expression est absolument convergente, la fonction $\xi\mapsto\phi^G_{reg,\tilde{M}_t}(t,\nu;\lambda+\xi,0)$ étant lisse et à croissance modérée.

**Lemme**. *Il existe une unique fonction* $T \mapsto f(T)$ *qui appartient à* $PolExp$ *et qui coïncide avec* $mes(\mathcal{A}_{\tilde{G}}(F)_c)^{-1}\mathbf{E}^T_{t,\nu}$ *dans le cône où celle-ci est définie. Si* $F$ *est archimédien, on a* $c_0(f) = j_{spec,t,\nu}$. *Si* $F$ *est non-archimédien, pour tout réseau* $\mathcal{R} \subset \mathcal{A}_{M_0,F} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$, *on a l'égalité*

$$lim_{k\to\infty} c_{\frac{1}{k}\mathcal{R},0}(f) = j_{spec,t,\nu}.$$

**Remarque.** Pour simplifier, on appellera "terme constant" de $f$ le terme $c_0(f)$ si $F$ est archimédien, $lim_{k\to\infty} c_{\frac{1}{k}\mathcal{R},0}(f)$ si $F$ est non-archimédien.

Preuve. On suppose $F$ non-archimédien, le cas archimédien étant similaire. Considérons la formule de la proposition précédente. Pour tous $\lambda$, $X$ et pour tout $\xi \in i\mathcal{A}^*_{\tilde{M}_t,F}$, la fonction $T \mapsto f_{\lambda,X,\xi}(T) = \phi^T_{reg,\tilde{M}_t}(t,\nu,X;\lambda+\xi,\Lambda(\lambda))$ est définie pour $T \in \mathcal{A}_{M_0,F} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ et elle appartient à $PolExp$, cf. lemme 1.7. Plus précisément, elle appartient à un espace $PolExp_{\Xi,N}$, où $\Xi$ et $N$ ne dépendent pas de $\xi$. Autrement dit, pour tout réseau $\mathcal{R} \subset \mathcal{A}_{M_0,F} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$, on peut écrire

$$f_{\lambda,X,\xi}(T) = \sum_{\mu\in\mathcal{X}_\mathcal{R}} e^{<\mu,T>} p_{\mathcal{R},\mu}(T)$$

pour $T \in \mathcal{R}$, avec un ensemble $\mathcal{X}_\mathcal{R}$ indépendant de $\xi$ et des polynômes $p_{\mathcal{R},\mu}$ de degré borné indépendamment de $\xi$. Les coefficients de ces polynômes se calculent par interpolation et vérifient donc les mêmes propriétés que la fonction $f_{\lambda,X,\xi}$ elle-même. Ils sont donc $C^\infty$ en $\xi$. Il en résulte que le développement en $T$ commute à l'intégrale en $\xi$. Cela implique que, si on note $f(T)$ le membre de droite de l'égalité de la proposition 3.22 multiplié par $mes(\mathcal{A}_{\tilde{G}}(F)_c)^{-1}$, la fonction $T \mapsto f(T)$ appartient à $PolExp$ et que son coefficient $c_{\mathcal{R},0}(f)$ se calcule en remplaçant $f_{\lambda,X,\xi}$ par son coefficient $c_{\mathcal{R},0}(f_{\lambda,X,\xi})$ dans la formule intégrale. Remarquons que la norme (au sens de 1.7) de la $(\tilde{G},\tilde{M}_t)$-famille $(\phi_{reg}(t,\nu;\lambda+\xi,\Lambda,\tilde{P}))_{\tilde{P}\in\mathcal{P}(\tilde{M}_t)}$ est bornée indépendamment de $\xi$. Il résulte donc du lemme 1.7 que $lim_{k\to\infty} c_{\frac{1}{k}\mathcal{R},0}(f)$ se calcule en remplaçant $f_{\lambda,X,\xi}$ par $lim_{k\to\infty} c_{\frac{1}{k}\mathcal{R},0}(f_{\lambda,X,\xi})$ dans la formule intégrale (multipliée par $mes(\mathcal{A}_{\tilde{G}}(F)_c)^{-1}$). Cette dernière limite est 0 si $\Lambda(\lambda) \notin (i\mathcal{A}^\vee_{\tilde{M}_t,F} + i\mathcal{A}^*_{\tilde{G}})/i\mathcal{A}^\vee_{\tilde{M}_t,F}$. Si $\Lambda(\lambda) \in (\Lambda_1(\lambda) + i\mathcal{A}^\vee_{\tilde{M}_t,F})/i\mathcal{A}^\vee_{\tilde{M}_t,F}$, avec $\Lambda_1(\lambda) \in i\mathcal{A}^*_{\tilde{G}}$, c'est

$$mes(\mathcal{A}_{\tilde{G}}(F)_c)^{-1} mes(i\mathcal{A}^*_{\tilde{M}_t,F}) mes(i\mathcal{A}^*_{\tilde{G},F})^{-1} e^{<\Lambda_1(\lambda),X>} \phi^{\tilde{G}}_{reg,\tilde{M}_t}(t,\nu;\lambda+\xi,\Lambda_1(\lambda)).$$

La somme en $X$ devient simplement

$$\sum_{X\in\mathcal{A}_{\tilde{G},F}/\mathcal{A}_{A_{\tilde{G}},F}} e^{<\Lambda_1(\lambda),X>}.$$

Cette somme vaut $[\mathcal{A}_{\tilde{G},F} : \mathcal{A}_{A_{\tilde{G}},F}] = mes(i\mathcal{A}^*_{\tilde{G},F}) mes(A_{\tilde{G}}(F)_c)$ si $\Lambda_1(\lambda) \in i\mathcal{A}^\vee_{\tilde{G},F}$, 0 sinon. La condition $\Lambda_1(\lambda) \in i\mathcal{A}^\vee_{\tilde{G},F}$ équivaut à $\Lambda(\lambda) = 0$. Ces calculs conduisent à l'égalité de l'énoncé. $\square$

## 3.24 Le terme constant de $j^T$

Considérons l'ensemble des $\lambda \in i\mathcal{A}^*_{M_{disc}}$ tels que $t(\sigma_\lambda \circ \theta) \simeq \omega\sigma_\lambda$. Il est invariant par translations par $i\mathcal{A}^\vee_{M_{disc},F} + i\mathcal{A}^*_{\tilde{M}_t}$. On note $[\sigma]_t$ son quotient par l'action de ce groupe.

Ce quotient est fini. On vérifie que l'application $\lambda \mapsto (t\lambda' - \lambda, \lambda)$ est une bijection de $[\sigma]_t$ sur l'ensemble des couples $(\nu, \lambda)$, où

- $\nu \in [t\sigma', \omega\sigma]$ ;
- $\lambda \in \{\nu\}_t$ ;
- $\Lambda(\lambda) = 0$.

Posons

$$j_{spec} = \sum_{t \in W^G(M_{disc}|M'_{disc})} |det((1 - t\theta^{-1})_{|\mathcal{A}_{M_{disc}}^{\tilde{M}_t,*}})|^{-1} \sum_{\lambda \in [\sigma]_t}$$

$$\int_{i\mathcal{A}^*_{\tilde{M}_t,F}} B(\lambda + \xi)\epsilon(t, t\lambda' - \lambda; \lambda + \xi)\phi^{\tilde{G}}_{reg,\tilde{M}_t}(t, t\lambda' - \lambda; \lambda + \xi, 0)\, d\xi.$$

Ce terme est bien défini d'après les propriétés ci-dessus.

**Corollaire**. *Il existe une unique fonction $T \mapsto f(T)$ qui appartient à $PolExp$ et qui vérifie la majoration*

$$|j^T - f(T)| << |T|^{-r}$$

*pour tout réel $r$ et tout $T$ dans le cône où $j^T$ est définie. Si $F$ est archimédien, on a $c_0(f) = j_{spec}$. Si $F$ est non-archimédien, pour tout réseau $\mathcal{R} \subset \mathcal{A}_{M_0,F} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$, on a l'égalité*

$$lim_{k\to\infty} c_{\frac{1}{k}\mathcal{R},0}(f) = j_{spec}.$$

Preuve. L'existence de la fonction $f$ résulte du lemme 3.19, de la définition de $\mathbf{E}^T$ et du lemme précédent. L'unicité est claire : un élément de $PolExp$ est nul s'il est à décroissance rapide dans un cône. On calcule le terme constant en utilisant le lemme précédent. Ce calcul conduit à une formule similaire à $j_{spec}$ ci-dessus, à ceci près que la somme en $\lambda \in [\sigma]_t$ y est remplacée par une double somme sur $\nu \in [\sigma, \omega t\theta\sigma]$ et $\lambda \in \{\nu\}_t$ tel que $\Lambda(\lambda) = 0$. Comme on l'a dit ci-dessus, cette double somme coïncide avec une somme en $\lambda \in [\sigma]_t$. $\square$

## 3.25 Définition d'une expression spectrale

Soit $\tilde{M}$ un espace de Levi de $\tilde{G}$. On suppose que $M_0 \subset M$. Soit $\tau = (M_{disc}, \sigma, r)$ un triplet formé d'un Levi semi-standard $M_{disc} \subset M$, d'une représentation $\sigma$ de $M_{disc}(F)$ irréductible et de la série discrète et d'un élément $\tilde{r} \in R^{\tilde{M}}(\sigma)$. On fixe un relèvement $\tilde{\boldsymbol{r}} \in \mathcal{R}^{\tilde{M}}(\sigma)$ et on pose $\boldsymbol{\tau} = (M_{disc}, \sigma, \tilde{\boldsymbol{r}})$. Fixons aussi un élément $\tilde{P} \in \mathcal{P}(\tilde{M})$, puis un élément $S \in \mathcal{P}(M_{disc})$ tel que $S \subset P$. Posons $\pi_\tau = Ind^M_{S\cap M}(\sigma)$ et $\Pi_\tau = Ind^G_S(\sigma) \simeq Ind^G_P(\pi_\tau)$. A l'aide de $\boldsymbol{\tau}$, on a défini en 2.9 une représentation de $\tilde{M}(F)$ dans l'espace $V_{\sigma,S\cap P}$ de $\pi_\tau$ et une représentation de $\tilde{G}(F)$ dans l'espace $V_{\sigma,P}$ de $\Pi_\tau$. Notons-les respectivement $\tilde{\pi}_{\boldsymbol{\tau}}$ et $\tilde{\Pi}_{\boldsymbol{\tau}}$. On a $\tilde{\Pi}_{\boldsymbol{\tau}} = Ind^{\tilde{G}}_{\tilde{P}}(\tilde{\pi}_{\boldsymbol{\tau}})$. Soit $\tilde{\lambda} \in i\tilde{\mathcal{A}}^*_{\tilde{M},F}$ en position générale. On peut remplacer $\tau$ par $\tau_\lambda = (M, \sigma_\lambda, \tilde{r})$ et $\boldsymbol{\tau}$ par $\boldsymbol{\tau}_{\tilde{\lambda}} = (M, \sigma_\lambda, \tilde{\boldsymbol{r}})$ cf. 2.9. On définit comme en 2.7 la $(\tilde{G}, \tilde{M})$-famille $(\mathcal{M}(\pi_{\tau_\lambda}; \Lambda, \tilde{Q}))_{\tilde{Q}\in\mathcal{P}(\tilde{M})}$ dont les fonctions prennent leurs valeurs dans l'espace des endomorphismes de $V_{\sigma,S\cap P}$. Rappelons que l'on a fixé deux fonctions $f_1, f_2 \in C^\infty_c(\tilde{G}(F))$. On définit une $(\tilde{G}, \tilde{M})$-famille $(\mathcal{J}(\pi_{\tau_\lambda}, f_1, f_2; \Lambda, \tilde{Q}))_{\tilde{Q}\in\mathcal{P}(\tilde{M})}$ par

$$\mathcal{J}(\pi_{\tau_\lambda}, f_1, f_2; \Lambda, \tilde{Q}) = \overline{trace(\mathcal{M}(\pi_{\tau_\lambda}; \Lambda, \bar{\tilde{Q}}))\tilde{\Pi}_{\boldsymbol{\tau}_{\tilde{\lambda}}}(f_1)}trace(\mathcal{M}(\pi_{\tau_\lambda}; \Lambda, \tilde{Q})\tilde{\Pi}_{\boldsymbol{\tau}_{\tilde{\lambda}}}(f_2)).$$

On en déduit une fonction $\mathcal{J}_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(\pi_{\tau_\lambda}, f_1, f_2; \Lambda)$. On pose

$$J_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(\pi_{\tau_\lambda}, f_1, f_2) = \mathcal{J}_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(\pi_{\tau_\lambda}, f_1, f_2; 0).$$

**Remarque.** A cause de la double apparition de $\tilde{\pi}_{\boldsymbol{\tau}_{\tilde{\lambda}}}$ dans les définitions ci-dessus, les fonctions ainsi définies ne dépendent ni du relèvement $\boldsymbol{\tau}$ de $\tau$, ni du relèvement $\tilde{\lambda}$ de $\lambda$.

On rappelle que l'on a défini la notion de triplet essentiel, cf. 2.9. Cette notion dépend de l'espace ambiant. Ici, c'est l'espace $\tilde{M}$. On a

(1) si le triplet $\tau$ n'est pas essentiel pour $\tilde{M}$, les fonctions ci-dessus sont nulles.

Le caractère de $\tilde{\pi}_{\boldsymbol{\tau}_{\tilde{\lambda}}}$ étant nul pour tout $\tilde{\lambda}$, la preuve est la même que celle de 2.7(3).

On suppose désormais $\tau$ essentiel, c'est-à-dire $\tau \in E(\tilde{M}, \omega)$. Il est clair que la fonction $\lambda \mapsto J_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(\pi_{\tau_\lambda}, f_1, f_2)$ est la restriction à $i\mathcal{A}_{\tilde{M},F}^*$ d'une fonction méromorphe.

**Lemme**. *La fonction $\lambda \mapsto J_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(\pi_{\tau_\lambda}, f_1, f_2)$ est régulière sur tout $i\mathcal{A}_{\tilde{M},F}^*$. Si $F$ est archimédien, c'est une fonction de Schwartz sur cet espace.*

Preuve. Convertissons tous les opérateurs d'entrelacement qui interviennent dans les définitions en produits d'opérateurs nomalisés et de facteurs de normalisation. On obtient une expression

$$\mathcal{J}(\pi_{\tau_\lambda}, f_1, f_2; \Lambda, \tilde{Q}) = \mathbf{r}(\pi_{\tau_\lambda}; \Lambda, \tilde{Q})\mathcal{J}_{reg}(\pi_{\tau_\lambda}, f_1, f_2; \Lambda, \tilde{Q}),$$

où on a regroupé dans $\mathbf{r}(\pi_{\tau_\lambda}; \Lambda, \tilde{Q})$ les facteurs de normalisation. On calcule $\mathbf{r}(\pi_{\tau_\lambda}; \Lambda, \tilde{Q})$. C'est le produit de

$$r_{P|Q}(\sigma_\lambda)r_{Q|P}(\sigma_{\lambda+\Lambda})r_{P|Q}(\sigma_{\lambda+\Lambda/2})^{-1}r_{Q|P}(\sigma_{\lambda+\Lambda/2})^{-1}$$

et du conjugué de

$$r_{P|\bar{Q}}(\sigma_\lambda)r_{\bar{Q}|P}(\sigma_{\lambda+\Lambda})r_{P|\bar{Q}}(\sigma_{\lambda+\Lambda/2})^{-1}r_{\bar{Q}|P}(\sigma_{\lambda+\Lambda/2})^{-1}.$$

On obtient

$$\mathbf{r}(\pi_{\tau_\lambda}; \Lambda, \tilde{Q}) = r_{\bar{Q}|Q}(\sigma_\lambda)r_{Q|\bar{Q}}(\sigma_{\lambda+\Lambda})r_{Q|\bar{Q}}(\sigma_{\lambda+\Lambda/2})^{-1}r_{\bar{Q}|Q}(\sigma_{\lambda+\Lambda/2})^{-1}.$$

Le produit des deux derniers termes est indépendant de $\tilde{Q}$. On peut donc écrire

$$\mathbf{r}(\pi_{\tau_\lambda}; \Lambda, \tilde{Q}) = C(\lambda, \Lambda)\mathbf{r}_{reg}(\pi_{\tau_\lambda}; \Lambda, \tilde{Q}),$$

où

$$C(\lambda, \Lambda) = r_{\bar{P}|P}(\sigma_\lambda)r_{P|\bar{P}}(\sigma_{\lambda+\Lambda})r_{P|\bar{P}}(\sigma_{\lambda+\Lambda/2})^{-1}r_{\bar{P}|P}(\sigma_{\lambda+\Lambda/2})^{-1}$$

et

$$\mathbf{r}_{reg}(\pi_{\tau_\lambda}; \Lambda, \tilde{Q}) = r_{\bar{Q}|Q}(\sigma_\lambda)r_{\bar{P}|P}(\sigma_\lambda)^{-1}r_{Q|\bar{Q}}(\sigma_{\lambda+\Lambda})r_{P|\bar{P}}(\sigma_{\lambda+\Lambda})^{-1}.$$

En un point $\lambda$ général, $J_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(\rho_{\tau_\lambda}, f_1, f_2)$ est donc le produit de $C(\lambda, 0)$ et d'un terme issu de la $(\tilde{G}, \tilde{M})$-famille

$$(\mathbf{r}_{reg}(\rho_{\tau_\lambda}; \Lambda, \tilde{Q})\mathcal{J}_{reg}(\rho_{\tau_\lambda}, f_1, f_2; \Lambda, \tilde{Q}))_{\tilde{Q}\in\mathcal{P}(\tilde{M})}.$$

Le terme $C(\lambda,0)$ vaut 1. La $(\tilde{G},\tilde{M})$-famille ci-dessus est formée de fonctions régulières en $\lambda$ et $\Lambda$ (d'après 1.10(5)). Elle donne donc naissance à une fonction régulière en $\lambda$. Dans le cas où $F$ est archimédien, on décompose plus finement cette dernière $(\tilde{G},\tilde{M})$-famille en combinaison linéaire de produit de familles similaires et de coefficients matriciels des opérateurs $\tilde{\Pi}_{\boldsymbol{\tau}_{\tilde{\lambda}}}(f_1)$ et $\tilde{\Pi}_{\boldsymbol{\tau}_{\tilde{\lambda}}}(f_2)$. Ces coefficients sont de Schwartz tandis les autres termes donnent naissance à des fonctions à croissance modérée en $\lambda$ (lemme 1.4). D'où le lemme. $\square$

**Remarque.** Dans le cas où $\tilde{M}=\tilde{G}$, on a simplement l'égalité

$$J_{\tilde{G}}^{\tilde{G}}(\pi_{\tau_\lambda},f_1,f_2)=\overline{trace(\tilde{\Pi}_{\boldsymbol{\tau}_{\tilde{\lambda}}}(f_1))}trace(\tilde{\Pi}_{\boldsymbol{\tau}_{\tilde{\lambda}}}(f_2)).$$

D'après le lemme, le terme $J_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(\pi_{\tau_\lambda},f_1,f_2)$ est défini pour tout $\lambda$. On vérifie qu'il ne dépend pas de l'espace parabolique $\tilde{P}$ choisi et qu'il ne dépend que de la classe de conjugaison par $M(F)$ de l'élément $\tau_\lambda$. On pose

$$J_{\tilde{M},spec}^{\tilde{G}}(\omega,f_1,f_2)=\sum_{\tau\in(E_{disc}(\tilde{M},\omega)/conj)/i\mathcal{A}_{\tilde{M},F}^*}|\mathbf{Stab}(W^M\times i\mathcal{A}_{\tilde{M},F}^*,\tau)|^{-1}\iota(\tau)$$

$$\int_{i\mathcal{A}_{\tilde{M},F}^*}J_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(\pi_{\tau_\lambda},f_1,f_2)\,d\lambda.$$

Pour toute classe $\tau\in(E_{disc}(\tilde{M},\omega)/conj)/i\mathcal{A}_{\tilde{M},F}^*$, on a choisi un point-base que l'on a également noté $\tau$. Les termes $\mathbf{Stab}(W^M\times i\mathcal{A}_{\tilde{M},F}^*,\tau)$ et $\iota(\tau)$ ont été définis en 2.9 et 2.10. On vérifie que l'expression $J_{\tilde{M},spec}^{\tilde{G}}(\omega,f_1,f_2)$ ne dépend que de la classe de conjugaison par $\tilde{G}(F)$ de l'espace de Levi $\tilde{M}$.

## 3.26 La formule spectrale

On pose $\tilde{W}^G=Norm_{G(F)}(\tilde{M}_0)/M_0(F)$ (on ne confondra pas ce groupe avec le quotient par $M_0(F)$ du normalisateur de $M_0$ dans $\tilde{G}(F)$). Posons

$$J_{spec}^{\tilde{G}}(\omega,f_1,f_2)=\sum_{\tilde{M}\in\mathcal{L}(\tilde{M}_0)}|\tilde{W}^M||\tilde{W}^G|^{-1}(-1)^{a_{\tilde{M}}-a_{\tilde{G}}}J_{\tilde{M},spec}^{\tilde{G}}(\omega,f_1,f_2).$$

**Proposition**. *Il existe une unique fonction $T\mapsto\varphi(T)$ qui appartient à $PolExp$ et qui vérifie pour tout réel $r$ la majoration*

$$|J^T(\omega,f_1,f_2)-\varphi(T)|<<|T|^{-r}$$

*pour tout $T$ dans le cône où $J^T(\omega,f_1,f_2)$ est définie. Si $F$ est archimédien, on a l'égalité*

$$c_0(\varphi)=J_{spec}^{\tilde{G}}(\omega,f_1,f_2).$$

*Si $F$ est non-archimédien, pour tout réseau $\mathcal{R}\subset\mathcal{A}_{M_0,F}\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{Q}$, on a l'égalité*

$$lim_{k\to\infty}c_{\frac{1}{k}\mathcal{R},0}(\varphi)=J_{spec}^{\tilde{G}}(\omega,f_1,f_2).$$

Preuve. Il résulte des formules 3.2(1) et 3.3(1) que $J^T(\omega, f_1, f_2)$ est somme finie de termes $j^T$ tels qu'en 3.4. L'existence de la fonction $\varphi$ résulte donc du corollaire 3.24. Comme toujours, l'unicité de $\varphi$ est évidente. Le terme constant de $\varphi$ se calcule en sommant les termes constants des différents $j^T$ intervenant, lesquels sont calculés par le même corollaire 3.24. Commençons par calculer le terme constant de l'élément de $PolExp$ asymptote à l'expression $J^T_{M_{disc},\sigma}(\omega, f_1, f_2)$ de 3.3(1). Il est égal à

$$(1) \qquad \sum_{u,v\in\mathcal{B},u',v'\in\mathcal{B}'} \sum_{t\in W^G(M_{disc}|M'_{disc})} |det((1-t\theta^{-1})_{|\mathcal{A}^{\tilde{M}_t,*}_{M_{disc}}})|^{-1} \sum_{\lambda\in[\sigma]_t}$$

$$\int_{i\mathcal{A}^*_{\tilde{M}_t,F}} B_{u,v,u',v'}(\lambda+\xi)\epsilon(t, t\lambda'-\lambda; \lambda+\xi)\phi^{\tilde{G}}_{reg,\tilde{M}_t}(u,v,u',v'; t, t\lambda'-\lambda; \lambda+\xi, 0)\, d\xi.$$

On a précisé la notation en rétablissant le quadruplet $(u, v, u', v')$ dans la fonction notée simplement $\phi^{\tilde{G}}_{reg,\tilde{M}_t}(t, t\lambda'-\lambda; \lambda+\xi, 0)$ dans le corollaire 3.24. Les sommes en $u$, $v$, $u'$ et $v'$ sont finies, on peut les faire entrer sous l'intégrale. Fixons $t$, $\lambda$ et $\xi$, calculons

$$\sum_{u,v\in\mathcal{B},u',v'\in\mathcal{B}'} B_{u,v,u',v'}(\lambda+\xi)\phi^{\tilde{G}}_{reg,\tilde{M}_t}(u,v,u',v'; t, t\lambda'-\lambda; \lambda+\xi, 0).$$

C'est la valeur en $\Lambda = 0$ de la fonction $h^{\tilde{G}}_{\tilde{M}_t}(\Lambda)$ associée à la $(\tilde{G}, \tilde{M}_t)$-famille $(h(\Lambda, \tilde{P}))_{\tilde{P}\in\mathcal{P}(\tilde{M}_t)}$ définie par

$$h(\Lambda, \tilde{P}) = \sum_{u,v\in\mathcal{B},u',v'\in\mathcal{B}'} B_{u,v,u',v'}(\lambda+\xi)\phi_{reg}(u,v,u',v'; t, t\lambda'-\lambda; \lambda+\xi, \Lambda, \tilde{P}).$$

Fixons $S'' \in \mathcal{P}(M_{disc})$ tel que $S'' \subset P$. Posons pour simplifier $\nu = t\lambda' - \lambda$, $\underline{\sigma} = \sigma_\lambda$, $\underline{\pi} = \pi_\lambda$. En revenant aux définitions de 3.3 et 3.16, on a

$$h(\Lambda, \tilde{P}) = \sum_{u,v\in\mathcal{B},u',v'\in\mathcal{B}'} (\underline{\pi}_\xi(\varphi_1)U_{\theta,\underline{\sigma}_\xi}u', v)(u, \underline{\pi}_\xi(\varphi_2)U_{\theta,\underline{\sigma}_\xi}v')r_{S'',reg}(\underline{\sigma}_\xi)^{-1}r_{S'',reg}(\underline{\sigma}_{\xi+\Lambda})$$

$$(A(t,\nu;\lambda+\xi)v', R_{\bar{S}''|S}(\underline{\sigma}_\xi)^{-1} \circ R_{\bar{S}''|S}(\underline{\sigma}_{\xi+\Lambda})u)$$

$$(R_{S''|S}(\underline{\sigma}_\xi)^{-1} \circ R_{S''|S}(\underline{\sigma}_{\xi+\Lambda})v, A(t,\nu;\lambda+\xi)u').$$

Les sommes en $u$ et $v$ se simplifient en

$$(2) \qquad h(\Lambda, \tilde{P}) = \sum_{u',v'\in\mathcal{B}'} r_{S'',reg}(\underline{\sigma}_\xi)^{-1}r_{S'',reg}(\underline{\sigma}_{\xi+\Lambda})$$

$$(A(t,\nu;\lambda+\xi)v', R_{\bar{S}''|S}(\underline{\sigma}_\xi)^{-1} \circ R_{\bar{S}''|S}(\underline{\sigma}_{\xi+\Lambda})\underline{\pi}_\xi(\varphi_2)U_{\theta,\underline{\sigma}_\xi}v')$$

$$(R_{S''|S}(\underline{\sigma}_\xi)^{-1} \circ R_{S''|S}(\underline{\sigma}_{\xi+\Lambda})\underline{\pi}_\xi(\varphi_1)U_{\theta,\underline{\sigma}_\xi}u', A(t,\nu;\lambda+\xi)u').$$

On a

$$\sum_{v'\in\mathcal{B}'} (A(t,\nu;\lambda+\xi)v', R_{\bar{S}''|S}(\underline{\sigma}_\xi)^{-1} \circ R_{\bar{S}''|S}(\underline{\sigma}_{\xi+\Lambda})\underline{\pi}_\xi(\varphi_2)U_{\theta,\underline{\sigma}_\xi}v')$$

$$= \sum_{v'\in\mathcal{B}'} (v', A(t,\nu;\lambda+\xi)^{-1}R_{\bar{S}''|S}(\underline{\sigma}_\xi)^{-1} \circ R_{\bar{S}''|S}(\underline{\sigma}_{\xi+\Lambda})\underline{\pi}_\xi(\varphi_2)U_{\theta,\underline{\sigma}_\xi}v')$$

$$= trace(A(t,\nu;\lambda+\xi)^{-1}R_{\bar{S}''|S}(\underline{\sigma}_\xi)^{-1} \circ R_{\bar{S}''|S}(\underline{\sigma}_{\xi+\Lambda})\underline{\pi}_\xi(\varphi_2)U_{\theta,\underline{\sigma}_\xi})$$

$$(3) \qquad = trace(R_{\bar{S}''|S}(\underline{\sigma}_{\xi})^{-1} \circ R_{\bar{S}''|S}(\underline{\sigma}_{\xi+\Lambda})\underline{\pi}_{\xi}(\varphi_2)U_{\theta,\underline{\sigma}_{\xi}}A(t,\nu;\lambda+\xi)^{-1}).$$

La condition $\lambda \in [\sigma]_t$ équivaut à l'équivalence $t\underline{\sigma}'_{\xi} \simeq \omega\underline{\sigma}_{\xi}$, ou encore $\underline{\sigma}_{\xi} \circ ad_{\gamma} \simeq \omega\underline{\sigma}_{\xi}$, où $\gamma = \gamma_0 t^{-1}$ (en identifiant $t$ à un relèvement dans $G(F)$). On vérifie que le couple $(A_{\nu},\gamma)$ appartient à $\mathcal{N}^{\tilde{M}_t}(\underline{\sigma}_{\xi}) \subset \mathcal{N}^{\tilde{G}}(\underline{\sigma}_{\xi})$. En considérant $(A_{\nu},\gamma)$ comme un élément de ce dernier ensemble, on a défini l'opérateur $\tilde{\nabla}_S(A_{\nu},\gamma)$ en 2.8. En comparant les définitions, on obtient l'égalité

$$U_{\theta,\underline{\sigma}_{\xi}}A(t,\nu;\lambda+\xi)^{-1} = \tilde{\nabla}_S(A_{\nu},\gamma)\underline{\pi}_{\xi}(t).$$

Relevons $\xi$ en l'élément $\tilde{\xi} \in i\tilde{\mathcal{A}}^*_{\tilde{M}_t,F}$ tel que $< \tilde{\xi}, \tilde{H}_{\tilde{M}_t}(\gamma) >= 0$. A l'aide de cet élément, on identifie $\mathcal{R}^{\tilde{M}_t}(\underline{\sigma})$ à $\mathcal{R}^{\tilde{M}_t}(\underline{\sigma}_{\xi})$. Notons $\tilde{\boldsymbol{r}}$ l'image de $(A_{\nu},\gamma)$ dans $\mathcal{R}^{\tilde{M}_t}(\underline{\sigma}_{\xi}) = \mathcal{R}^{\tilde{M}_t}(\underline{\sigma})$, posons $\boldsymbol{\tau} = (M_{disc},\underline{\sigma},\tilde{\boldsymbol{r}})$ et $\tau = (M_{disc},\underline{\sigma},\tilde{r})$, où $\tilde{r}$ est l'image de $\tilde{\boldsymbol{r}}$ dans $R^{\tilde{M}_t}(\underline{\sigma})$. Introduisons la représentation de $\tilde{G}(F)$ associée en 2.8 à $\boldsymbol{\tau}_{\tilde{\xi}}$, vu comme un triplet pour $\tilde{G}$, que l'on note ici simplement $\underline{\tilde{\Pi}}_{\xi}$. Alors

$$\tilde{\nabla}_S(A_{\nu},\gamma)\underline{\pi}_{\xi}(t) = \omega(t)^{-1}\underline{\tilde{\Pi}}_{\xi}(\gamma_0).$$

En revenant à la définition de $\varphi_2$ en 3.2, on voit que

$$\underline{\pi}_{\xi}(\varphi_2)U_{\theta,\underline{\sigma}_{\xi}}A(t,\nu;\lambda+\xi)^{-1} = \omega(t)^{-1}\underline{\tilde{\Pi}}_{\xi}(f_2).$$

L'expression (3) devient simplement

$$\omega(t)^{-1}trace(R_{\bar{S}''|S}(\underline{\sigma}_{\xi})^{-1} \circ R_{\bar{S}''|S}(\underline{\sigma}_{\xi+\Lambda})\underline{\tilde{\Pi}}_{\xi}(f_2)).$$

On traite de même la somme en $u'$. Les opérateurs portant cette fois sur la première variable des produits scalaires, on obtient une expression conjuguée. En particulier, il sort un facteur $\overline{\omega(t)}^{-1}$, dont le produit avec $\omega(t)^{-1}$ ci-dessus vaut 1. L'expression (2) devient

$$(4) \qquad h(\Lambda,\tilde{P}) = r_{S'',reg}(\underline{\sigma}_{\xi})^{-1}r_{S'',reg}(\underline{\sigma}_{\xi+\Lambda})\overline{trace(R_{S''|S}(\underline{\sigma}_{\xi})^{-1} \circ R_{S''|S}(\underline{\sigma}_{\xi+\Lambda})\underline{\tilde{\Pi}}_{\xi}(f_1))}$$

$$trace(R_{\bar{S}''|S}(\underline{\sigma}_{\xi})^{-1} \circ R_{\bar{S}''|S}(\underline{\sigma}_{\xi+\Lambda})\underline{\tilde{\Pi}}_{\xi}(f_2)).$$

Tous les termes sont relatifs à un parabolique $S$ de référence, que l'on a fixé au début du calcul. Fixons un élément $\tilde{P}_1 \in \mathcal{P}(\tilde{M}_t)$ et un élément $S_1 \in \mathcal{P}(M_{disc})$ tel que $S_1 \subset P_1$. Remplaçons $S$ par $S_1$ dans les définitions des termes ci-dessus. On obtient une nouvelle expression $h_1(\Lambda,\tilde{P})$. On a

(5) les valeurs en $\Lambda = 0$ des fonctions $h^{\tilde{G}}_{\tilde{M}}(\Lambda)$ et $h^{\tilde{G}}_{1,\tilde{M}}(\Lambda)$ sont égales.

On a

$$trace(R_{\bar{S}''|S}(\underline{\sigma}_{\xi})^{-1} \circ R_{\bar{S}''|S}(\underline{\sigma}_{\xi+\Lambda})\underline{\tilde{\Pi}}_{\xi}(f_2)) =$$

$$trace(R_{S_1|S}(\underline{\sigma}_{\xi})^{-1}R_{\bar{S}''|S_1}(\underline{\sigma}_{\xi})^{-1} \circ R_{\bar{S}''|S_1}(\underline{\sigma}_{\xi+\Lambda})R_{S_1|S}(\underline{\sigma}_{\xi+\Lambda})\underline{\tilde{\Pi}}_{\xi}(f_2))$$

$$= trace(R_{\bar{S}''|S_1}(\underline{\sigma}_{\xi})^{-1} \circ R_{\bar{S}''|S_1}(\underline{\sigma}_{\xi+\Lambda})R_{S_1|S}(\underline{\sigma}_{\xi+\Lambda})\underline{\tilde{\Pi}}_{\xi}(f_2)R_{S_1|S}(\underline{\sigma}_{\xi})^{-1}).$$

Le produit final

$$R_{S_1|S}(\underline{\sigma}_{\xi+\Lambda})\underline{\tilde{\Pi}}_{\xi}(f_2)R_{S_1|S}(\underline{\sigma}_{\xi})^{-1}$$

ne dépend pas de $S''$. Un principe général valable pour toute $(\tilde{G},\tilde{M})$-famille dit que l'on ne modifie pas la valeur $h^{\tilde{G}}_{\tilde{M}}(0)$ si on remplace un facteur indépendant de $S''$ par sa valeur en $\Lambda = 0$. Mais, en $\Lambda = 0$, le produit ci-dessus est égal à $\underline{\tilde{\Pi}}_{1,\xi}(f_2)$, où $\underline{\tilde{\Pi}}_{1,\xi}$ est l'analogue de $\underline{\tilde{\Pi}}_\xi$ relatif au parabolique $S_1$. Un même raisonnement s'applique aux autres termes et (5) s'ensuit.

En oubliant ce changement de $S$ en $S_1$, on suppose pour simplifier que $S \subset P_1$. Pour calculer $h(\Lambda, \tilde{P})$, on a choisi $S''$ avec $S'' \subset P$. On peut lui imposer de plus $S'' \cap M_t = S \cap M_t$. Introduisons l'élément $\underline{S}'' \in \mathcal{P}(M_{disc})$ tel que $\underline{S}'' \subset \bar{P}$ et $\underline{S}'' \cap M_t = S \cap M_t$. On a

$$R_{\bar{S}''|S}(\underline{\sigma}_\xi)^{-1} \circ R_{\bar{S}''|S}(\underline{\sigma}_{\xi+\Lambda}) = R_{\underline{S}''|S}(\underline{\sigma}_\xi)^{-1} \circ R_{\bar{S}''|\underline{S}''}(\underline{\sigma}_\xi)^{-1} \circ R_{\bar{S}''|\underline{S}''}(\underline{\sigma}_{\xi+\Lambda}) \circ R_{\underline{S}''|S}(\underline{\sigma}_{\xi+\Lambda}).$$

Mais $\bar{S}''$ et $\underline{S}''$ sont tous deux contenus dans $\bar{P}$. L'opérateur $R_{\bar{S}''|\underline{S}''}(\underline{\sigma}_{\xi+\Lambda})$ est induit de l'opérateur $R^{M_t}_{\bar{S}''\cap M_t|\underline{S}''\cap M_t}(\underline{\sigma}_{\xi+\Lambda})$ et celui-ci ne dépend pas de $\Lambda$ puisque $\Lambda \in i\mathcal{A}^*_{\tilde{M}_t,F}$. D'où

$$R_{\bar{S}''|\underline{S}''}(\underline{\sigma}_\xi)^{-1} \circ R_{\bar{S}''|\underline{S}''}(\underline{\sigma}_{\xi+\Lambda}) = 1,$$

puis

$$R_{\bar{S}''|S}(\underline{\sigma}_\xi)^{-1} \circ R_{\bar{S}''|S}(\underline{\sigma}_{\xi+\Lambda}) = R_{\underline{S}''|S}(\underline{\sigma}_\xi)^{-1} \circ R_{\underline{S}''|S}(\underline{\sigma}_{\xi+\Lambda}).$$

Rétablissons maintenant les opérateurs d'entrelacement non normalisés. La formule (4) se transforme en

$$(6)\qquad h(\Lambda, \tilde{P}) = \mathbf{r}_{S''}(\underline{\sigma}_\xi)^{-1}\mathbf{r}_{S''}(\underline{\sigma}_{\xi+\Lambda})\overline{trace(J_{S''|S}(\underline{\sigma}_\xi)^{-1} \circ J_{S''|S}(\underline{\sigma}_{\xi+\Lambda})\underline{\tilde{\Pi}}_\xi(f_1))}$$
$$trace(J_{\underline{S}''|S}(\underline{\sigma}_\xi)^{-1} \circ J_{\underline{S}''|S}(\underline{\sigma}_{\xi+\Lambda})\underline{\tilde{\Pi}}_\xi(f_2)),$$

où

$$\mathbf{r}_{S''}(\underline{\sigma}_\xi) = r_{S'',reg}(\underline{\sigma}_\xi) r_{\underline{S}''|S}(\underline{\sigma}_\xi)^{-1} r_{S|S''}(\underline{\sigma}_\xi)^{-1} = r_{S'',reg}(\underline{\sigma}_\xi) r_{\underline{S}''|S''}(\underline{\sigma}_\xi)^{-1},$$

puisque les distances entre $\underline{S}''$ et $S$ et entre $S$ et $S''$ s'ajoutent. Si l'on suppose $\xi$ en position générale, tous les termes ci-dessus sont bien définis. Introduisons la représentation $\tilde{\pi}_{\boldsymbol{\tau}_{\tilde{\xi}}}$ de $\tilde{M}_t(F)$ associée à $\boldsymbol{\tau}_{\tilde{\xi}}$. On note $\pi_{\tau_\xi}$ la représentation sous-jacente de $M_t(F)$. On a simplement $\underline{\tilde{\Pi}}_\xi = \tilde{\Pi}_{\boldsymbol{\tau}_{\tilde{\xi}}} = Ind_{\tilde{P}_1}^{\tilde{G}}(\tilde{\pi}_{\boldsymbol{\tau}_{\tilde{\xi}}})$. En identifiant ces représentations, les propriétés d'induction des opérateurs d'entrelacement entraînent que $J_{\underline{S}''|S}(\underline{\sigma}_\xi)^{-1} \circ J_{\underline{S}''|S}(\underline{\sigma}_{\xi+\Lambda})$ coïncide avec $J_{\bar{P}|P_1}(\pi_{\tau_\xi})^{-1} \circ J_{\bar{P}|P_1}(\pi_{\tau_{\xi+\Lambda}})$. En appliquant les définitions, la formule (6) se récrit

$$(7)\qquad h(\Lambda, \tilde{P}) = C(\underline{\sigma}_\xi, \Lambda, \tilde{P})\overline{trace(\mathcal{M}(\pi_{\tau_\xi}; \Lambda, \tilde{P})\underline{\tilde{\Pi}}_\xi(f_1))}trace(\mathcal{M}(\pi_{\tau_\xi}; \Lambda, \bar{\tilde{P}})\underline{\tilde{\Pi}}_\xi(f_2)),$$

où

$$C(\underline{\sigma}_\xi, \Lambda, \tilde{P}) = \mathbf{r}_{S''}(\underline{\sigma}_\xi)^{-1}\mathbf{r}_{S''}(\underline{\sigma}_{\xi+\Lambda})\mu_{\bar{P}|P_1}(\pi_{\tau_\xi})\mu_{\bar{P}|P_1}(\pi_{\tau_{\xi+\Lambda/2}})^{-1}\overline{\mu_{P|P_1}(\pi_{\tau_\xi})\mu_{P|P_1}(\pi_{\tau_{\xi+\Lambda/2}})^{-1}}.$$

On a l'égalité

$$\mu_{\bar{P}|P_1}(\pi_{\tau_\xi})\overline{\mu_{P|P_1}(\pi_{\tau_\xi})} = r_{\bar{P}|P}(\underline{\sigma}_\xi)^{-1} r_{P|\bar{P}}(\underline{\sigma}_\xi)^{-1}.$$

Ce terme est indépendant de $\tilde{P}$ : c'est le produit des $r_\alpha(\underline{\sigma}_\xi)^{-1}$ pour toutes les racines simples $\alpha$ de $A_{M_{disc}}$ intervenant dans $G$ et pas dans $M_t$. Pour la même raison, le produit

$$\mu_{\bar{P}|P_1}(\pi_{\tau_{\xi+\Lambda/2}})^{-1}\overline{\mu_{P|P_1}(\pi_{\tau_{\xi+\Lambda/2}})^{-1}}$$

est indépendant de $\tilde{P}$. Comme dans la preuve de (5), on ne change pas le terme $h^{\tilde{G}}_{\tilde{M}_t}(0)$ en remplaçant ces termes par leurs valeurs en $\Lambda = 0$. Mais alors le produit de ces deux termes vaut 1. On peut définir $\mathbf{r}_{S''}(\underline{\sigma}_{\xi+\mu})$ pour tout $\mu \in i\mathcal{A}^*_{M_{disc},F}$. Par définition $\mathbf{r}_{S''}(\underline{\sigma}_\xi)$ est la valeur de cette fonction en $\mu = 0$. Pour $\mu$ en position générale, on a

$$\mathbf{r}_{S''}(\underline{\sigma}_{\xi+\mu}) = r_{\bar{S}''|S''}(\underline{\sigma}_{\xi+\mu}) r_{\underline{S}''|S''}(\underline{\sigma}_{\xi+\mu})^{-1} r_{\bar{S}|S}(\underline{\sigma}_{\xi+\mu})^{-1}.$$

On introduit l'élément $\underline{S} \in \mathcal{P}(M_{disc})$ tel que $\underline{S} \subset \bar{P}_1$ et $\underline{S} \cap M_t = S \cap M_t$. Les distances entre $\bar{S}''$ et $\underline{S}''$ et entre $\underline{S}''$ et $S''$ s'ajoutent. De même, les distances entre $\bar{S}$ et $\underline{S}$ et entre $\underline{S}$ et $S$ s'ajoutent. D'où

$$\mathbf{r}_{S''}(\underline{\sigma}_{\xi+\mu}) = r_{\bar{S}''|\underline{S}''}(\underline{\sigma}_{\xi+\mu}) r_{\bar{S}|\underline{S}}(\underline{\sigma}_{\xi+\mu})^{-1} r_{\underline{S}|S}(\underline{\sigma}_{\xi+\mu})^{-1}.$$

Par les propriétés habituelles d'induction,

$$r_{\bar{S}''|\underline{S}''}(\underline{\sigma}_{\xi+\mu}) = r^{M_t}_{(\bar{S}''\cap M_t)|(\underline{S}''\cap M_t)}(\underline{\sigma}_{\xi+\mu}) = r^{M_t}_{(\bar{S}\cap M_t)|(\underline{S}\cap M_t)}(\underline{\sigma}_{\xi+\mu}) = r_{\bar{S}|\underline{S}}(\underline{\sigma}_{\xi+\mu}).$$

D'où $\mathbf{r}_{S''}(\underline{\sigma}_{\xi+\mu}) = r_{\underline{S}|S}(\underline{\sigma}_{\xi+\mu})^{-1}$. Ce terme est régulier en $\mu = 0$ (pour $\xi$ en position générale), d'où $\mathbf{r}_{S''}(\underline{\sigma}_{\xi}) = r_{\underline{S}|S}(\underline{\sigma}_{\xi})^{-1}$. On obtient

$$\mathbf{r}_{S''}(\underline{\sigma}_{\xi})^{-1}\mathbf{r}_{S''}(\underline{\sigma}_{\xi+\Lambda}) = r_{\underline{S}|S}(\underline{\sigma}_{\xi}) r_{\underline{S}|S}(\underline{\sigma}_{\xi+\Lambda})^{-1}.$$

Ce terme est indépendant de $S''$. Comme ci-dessus, on ne change pas le terme $h^{\tilde{G}}_{\tilde{M}_t}(0)$ en remplaçant l'expression précédente par sa valeur en $\Lambda = 0$. Mais celle-ci est 1. Cela prouve qu'on peut supprimer le terme $C(\underline{\sigma}_{\xi}, \Lambda, \tilde{P})$ de la formule (7) sans changer la valeur de $h^{\tilde{G}}_{\tilde{M}_t}(0)$. Quand on supprime ce terme $C(\underline{\sigma}_{\xi}, \Lambda, \tilde{P})$, le membre de droite de (6) devient $\mathcal{J}(\pi_{\tau_{\xi}}, f_1, f_2, \tilde{\bar{P}})$. Si c'était plus simplement $\mathcal{J}(\pi_{\tau_{\xi}}, f_1, f_2, \tilde{P})$, on en déduirait $h^{\tilde{G}}_{\tilde{M}_t}(0) = J^{\tilde{G}}_{\tilde{M}_t}(\pi_{\tau_{\xi}}, f_1, f_2)$. A cause du changement de $P$ en $\bar{P}$ et parce que $\epsilon^{\tilde{G}}_{\tilde{\bar{P}}}(\Lambda) = (-1)^{a_{\tilde{M}_t}-a_{\tilde{G}}}\epsilon^{\tilde{G}}_{\tilde{P}}(\Lambda)$, on obtient

$$h^{\tilde{G}}_{\tilde{M}_t}(0) = (-1)^{a_{\tilde{M}_t}-a_{\tilde{G}}} J^{\tilde{G}}_{\tilde{M}_t}(\pi_{\tau_{\xi}}, f_1, f_2).$$

On doit aussi calculer le terme $\epsilon(t, \nu; \lambda + \xi)$ qui intervient dans (1). D'après sa définition en 3.16, c'est la valeur en $\mu = \lambda + \xi$ de $r_{\bar{S}|S}(\sigma_{\mu}) r_{\bar{S}|S}(\sigma_{t\mu'-\nu})^{-1}$. Ou encore la valeur en $\mu = 0$ de $r_{\bar{S}|S}(\underline{\sigma}_{\xi+\mu}) r_{\bar{S}|S}(\underline{\sigma}_{\xi+t\mu'})^{-1}$. Le calcul est fait par Arthur en [A1] p.87. Le rapport précédent est égal à

$$(9) \qquad \prod_{\alpha >_S 0} r_{\alpha}(\underline{\sigma}_{\xi+\mu}) r_{\alpha}(\underline{\sigma}_{\xi+t\mu'})^{-1},$$

où $\alpha$ parcourt les racines simples de $A_{M_{disc}}$ dans $G$ qui sont positives pour $S$. Si $\alpha$ n'intervient pas dans $M_t$, $r_{\alpha}(\underline{\sigma}_{\xi+\mu})$ est régulière en $\mu = 0$ puisqu'on a supposé $\xi$ en position générale. Le rapport $r_{\alpha}(\underline{\sigma}_{\xi+\mu}) r_{\alpha}(\underline{\sigma}_{\xi+t\mu'})^{-1}$ vaut 1 en $\mu = 0$. Supposons que $\alpha$ intervient dans $M_t$. On définit un Levi $M_{\alpha}$ contenant $M_{disc}$ comme en 1.11. Si $m^{M_{\alpha}}(\underline{\sigma}_{\xi}) \neq 0$, $r_{\alpha}(\underline{\sigma}_{\xi+\mu})$ est encore régulière en $\mu = 0$ et le rapport $r_{\alpha}(\underline{\sigma}_{\xi+\mu}) r_{\alpha}(\underline{\sigma}_{\xi+t\mu'})^{-1}$ vaut encore 1 en $\mu = 0$. Supposons $m^{M_{\alpha}}(\underline{\sigma}_{\xi}) = 0$. On sait qu'alors $r_{\alpha}(\underline{\sigma}_{\xi+\mu})$ a un pôle d'ordre 1 en $\mu = 0$. Plus précisément, $r_{\alpha}(\underline{\sigma}_{\xi+\mu})$ est équivalente au voisinage de $\mu = 0$ à $c_{\alpha} < \mu, \check{\alpha} >$, où $c_{\alpha}$ est un nombre réel non nul. Le rapport $r_{\alpha}(\underline{\sigma}_{\xi+\mu}) r_{\alpha}(\underline{\sigma}_{\xi+t\mu'})^{-1}$ est donc équivalent à $< \mu, \check{\alpha} >< t\mu', \check{\alpha} >^{-1}$, ou encore à $< \mu, \check{\alpha} >< \mu, \theta t^{-1}\check{\alpha} >^{-1}$. En notant $\Sigma$ l'ensemble des racines $\alpha$ intervenant dans $M_t$ pour lesquelles $m^{M_{\alpha}}(\underline{\sigma}_{\xi}) = 0$, l'expression (1) est donc équivalente à

$$\prod_{\alpha \in \Sigma; \alpha >_S 0} < \mu, \check{\alpha} >< \mu, \theta t^{-1}\check{\alpha} >^{-1}.$$

Ce produit est égal au signe $\epsilon_{\underline{\sigma}}(w)$ défini en 2.9, où $w$ est l'image de $\gamma = \gamma_0 t^{-1}$ dans l'ensemble $W^{\tilde{M}_t}(\underline{\sigma}_{\xi}) = W^{\tilde{M}_t}(\underline{\sigma})$. D'où l'égalité

$$\epsilon(t, \nu; \lambda + \xi) = \epsilon_{\underline{\sigma}}(w).$$

A ce point, on a transformé la formule (1) en

$$\sum_{t\in W^G(M_{disc}|M'_{disc})}(-1)^{a_{\tilde{M}_t}-a_{\tilde{G}}}|det((1-t\theta^{-1})_{|\mathcal{A}_{M_{disc}}^{\tilde{M}_t}})|^{-1}$$

$$\sum_{\lambda\in[\sigma]_t}\epsilon_{\sigma_\lambda}(w)\int_{i\mathcal{A}^*_{\tilde{M}_t,F}}J_{\tilde{M}_t}^{\tilde{G}}(\pi_{\tau_\xi},f_1,f_2)\,d\xi.$$

On rappelle que $w$ est l'image de $\gamma=\gamma_0t^{-1}$ dans $W^{\tilde{M}_t}(\sigma_\lambda)$ et que $\tau=(M_{disc},\sigma_\lambda,r)$, où $r$ est l'image de $w$ dans $R^{\tilde{M}_t}(\sigma_\lambda)$. On décompose la formule ci-dessus selon les espaces de Levi $\tilde{M}_t$. Elle devient

$$(10)\qquad \sum_{\tilde{M};M_{disc}\subset M}X(\tilde{M},M_{disc},\sigma),$$

où $X(\tilde{M},M_{disc},\sigma)$ est l'expression obtenue à partir de l'expression ci-dessus en limitant la somme aux $t$ tels que $\tilde{M}_t=\tilde{M}$. Fixons $\tilde{M}$. On peut remplacer la double somme en $t\in W^G(M_{disc},M'_{disc})$ tels que $\tilde{M}_t=\tilde{M}$ et en $\lambda\in[\sigma]_t$ par une double somme en $\lambda\in i\mathcal{A}^*_{M_{disc}}/(i\mathcal{A}^\vee_{M_{disc},F}+i\mathcal{A}^*_{\tilde{M}})$ et en $t\in W^G(M_{disc},M'_{disc})$ tels que $\tilde{M}_t=\tilde{M}$ et $\sigma_\lambda\circ ad_{\gamma_0t^{-1}}\simeq\omega\sigma_\lambda$. Fixons $\lambda$. L'application $t\mapsto w$ est alors une bijection entre l'ensemble de sommation en $t$ et l'ensemble $W_{reg}^{\tilde{M}}(\sigma_\lambda)$. On peut encore décomposer cette somme en une somme sur $r\in R^{\tilde{M}}(\sigma_\lambda)$, que l'on écrit $r=W_0^M(\sigma_\lambda)w$, et une somme sur $w'\in W_0^M(\sigma_\lambda)w\cap W_{reg}^{\tilde{M}}(\sigma_\lambda)$. On voit que les seuls termes de l'expression qui dépendent de $w'$ sont $\epsilon_{\sigma_\lambda}(w')|det((1-w')_{|\mathcal{A}_{M_{disc}}^{\tilde{M}}}|^{-1}$. Leur somme vaut $|W_0^M(\sigma_\lambda)|\iota(\tau)$ où $\tau$ est comme ci-dessus. D'où

$$X(\tilde{M},M_{disc},\sigma)=(-1)^{a_{\tilde{M}}-a_{\tilde{G}}}\sum_{\lambda\in i\mathcal{A}^*_{M_{disc}}/(i\mathcal{A}^\vee_{M_{disc},F}+i\mathcal{A}^*_{\tilde{M}})}|W_0^M(\sigma_\lambda)|$$

$$\sum_{r\in R^{\tilde{M}}(\sigma_\lambda)}\iota(\tau)\int_{i\mathcal{A}^*_{\tilde{M},F}}J_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(\pi_{\tau_\xi},f_1,f_2)\,d\xi.$$

Notons $\Pi_{disc}(M_{disc}(F))/i\mathcal{A}^*_{\tilde{M},F}$ l'ensemble des orbites dans $\Pi_{disc}(M_{disc}(F))$ pour l'action de $i\mathcal{A}^*_{\tilde{M},F}$. Pour $\underline{\sigma}\in\Pi_{disc}(M_{disc}(F))$, notons $Stab(i\mathcal{A}^*_{\tilde{M},F},\underline{\sigma})$ son stabilisateur dans $i\mathcal{A}^*_{\tilde{M},F}$. Il ne dépend que de l'image de $\underline{\sigma}$ dans l'ensemble d'orbites précédent. Notons $\mathcal{O}_\sigma$ l'orbite de $\sigma$ pour l'action de $i\mathcal{A}^*_{M_{disc},F}$. Elle se décompose en orbites pour l'action de $i\mathcal{A}^*_{\tilde{M},F}$, notons $\mathcal{O}_\sigma/i\mathcal{A}^*_{\tilde{M},F}$ l'ensemble de ces orbites. Notons que $Stab(i\mathcal{A}^*_{\tilde{M},F},\underline{\sigma})$ est indépendant de $\underline{\sigma}$ dans cet ensemble. L'application qui, à $\lambda$, associe l'orbite de $\sigma_\lambda$ pour l'action de $i\mathcal{A}^*_{\tilde{M},F}$, a pour image $\mathcal{O}_\sigma/i\mathcal{A}^*_{\tilde{M},F}$ et a un noyau d'ordre $|Stab(i\mathcal{A}^*_{M_{disc},F},\sigma)||Stab(i\mathcal{A}^*_{\tilde{M},F},\sigma)|^{-1}$. Alors

$$X(\tilde{M},M_{disc},\sigma)=(-1)^{a_{\tilde{M}}-a_{\tilde{G}}}|Stab(i\mathcal{A}^*_{M_{disc},F},\sigma)|$$

$$\sum_{\underline{\sigma}\in\mathcal{O}_\sigma/i\mathcal{A}^*_{\tilde{M},F}}|Stab(i\mathcal{A}^*_{\tilde{M},F},\underline{\sigma})|^{-1}|W_0^M(\underline{\sigma})|\sum_{r\in R^{\tilde{M}}(\underline{\sigma})}\iota(\tau)\int_{i\mathcal{A}^*_{\tilde{M},F}}J_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(\pi_{\tau_\xi},f_1,f_2)\,d\xi,$$

où maintenant $\tau=(M_{disc},\underline{\sigma},\tilde{r})$.

Considérons la formule 3.2(1). Le terme constant de son membre de droite est la somme sur $M_{disc}\in\mathcal{L}(M_0)$ et sur $\sigma\in\Pi_{disc}(M_{disc}(F))/i\mathcal{A}^*_{M_{disc},F}$ de l'expression (10), multipliée par $|W^{M_{disc}}||W^G|^{-1}|Stab(i\mathcal{A}^*_{M_{disc},F},\sigma)|^{-1}$. On peut l'écrire

$$(11)\qquad \sum_{\tilde{M};M_0\subset M}|W^M||W^G|^{-1}X(\tilde{M}),$$

où

$$X(\tilde{M}) = \sum_{M_{disc}; M_0 \subset M_{disc} \subset M} |W^{M_{disc}}||W^M|^{-1}$$

$$\sum_{\sigma \in \Pi_{disc}(M_{disc}(F))/i\mathcal{A}^*_{M_{disc},F}} |Stab(i\mathcal{A}^*_{M_{disc},F}, \sigma)|^{-1} X(\tilde{M}, M_{disc}, \sigma).$$

Fixons $\tilde{M}$. La somme en $\sigma$ et celle en $\underline{\sigma} \in \mathcal{O}_\sigma/i\mathcal{A}^*_{\tilde{M},F}$ figurant dans $X(\tilde{M}, M_{disc}, \sigma)$ se simplifient en une somme sur l'ensemble $\Pi_{disc}(M_{disc}(F))/i\mathcal{A}^*_{\tilde{M},F}$. Considérons les triplets $\tau$ qui apparaissent. Ils ne sont pas forcément essentiels, mais on peut se limiter aux essentiels (pour $\tilde{M}$) puisque la contribution des autres est nulle d'après 3.25(1). Ils sont alors discrets, puisque sinon, le terme $\iota(\tau)$ est nul. On a donc

$$(12) \qquad X(\tilde{M}) = (-1)^{a_{\tilde{M}} - a_{\tilde{G}}} \sum_{\tau \in (E_{disc}(\tilde{M},\omega)/conj)/i\mathcal{A}^*_{\tilde{M},F}} C(\tau)\iota(\tau) \int_{i\mathcal{A}^*_{\tilde{M},F}} J^{\tilde{G}}_{\tilde{M}}(\pi_{\tau_\xi}, f_1, f_2)\, d\xi,$$

où $C(\tau)$ est la somme de

$$(13) \qquad |W^{M_{disc}}||W^M|^{-1}|Stab(i\mathcal{A}^*_{\tilde{M},F}, \underline{\sigma})|^{-1}|W_0^M(\underline{\sigma})|$$

sur les $M_{disc}$ tels que $M_0 \subset M_{disc} \subset M$, $\underline{\sigma} \in \Pi_{disc}(M_{disc}(F))/i\mathcal{A}^*_{\tilde{M},F}$, $\tilde{r} \in R^{\tilde{G}}(\underline{\sigma})$ tels que $(M_{disc}, \underline{\sigma}, \tilde{r})$ ait pour image $\tau$ dans $(E_{disc}(\tilde{M}, \omega)/conj)/i\mathcal{A}^*_{\tilde{M},F}$. Si on fixe un représentant $(M_{disc}, \underline{\sigma}, \tilde{r})$ de $\tau$, l'ensemble de sommation est celui des différents $(w(M_{disc}), w\underline{\sigma}, w(\tilde{r}))$ pour $w \in W^M$. Ou encore l'ensemble de ces triplets pour $w \in W^M/Stab(W^M, \tau/i\mathcal{A}^*_{\tilde{M},F})$, où $Stab(W^M, \tau/i\mathcal{A}^*_{\tilde{M},F})$ est le stabilisateur de $\tau \in E_{disc}(\tilde{M}, \omega)/i\mathcal{A}^*_{\tilde{M},F}$ dans $W^M$. Le terme (13) est constant sur l'ensemble de sommation. D'où

$$C(\tau) = |W^M/Stab(W^M, \tau/i\mathcal{A}^*_{\tilde{M},F})||W^{M_{disc}}||W^M|^{-1}|Stab(i\mathcal{A}^*_{\tilde{M},F}, \underline{\sigma})|^{-1}|W_0^M(\underline{\sigma})|$$

$$= |Stab(W^M, \tau/i\mathcal{A}^*_{\tilde{M},F})|^{-1}|W^{M_{disc}}||Stab(i\mathcal{A}^*_{\tilde{M},F}, \underline{\sigma})|^{-1}|W_0^M(\underline{\sigma})|.$$

On a défini en 2.9 le groupe $Stab(W^M \times i\mathcal{A}^*_{\tilde{M},F}, \tau)$ des $(w, \lambda) \in W^M \times i\mathcal{A}^*_{\tilde{M},F}$ qui conservent $\tau$. Prenons garde que dans la définition de ce groupe, $\tau$ est considéré comme un élément de $E_{disc}(\tilde{M}, \omega)$ tandis que, dans celle ci-dessus de $Stab(W^M, \tau/i\mathcal{A}^*_{\tilde{M},F})$, $\tau$ est considéré comme un élément du quotient $E_{disc}(\tilde{M}, \omega)/i\mathcal{A}^*_{\tilde{M},F}$. On voit qu'il y a une suite exacte

$$1 \to Stab(i\mathcal{A}^*_{\tilde{M},F}, \underline{\sigma}) \to Stab(W^M \times i\mathcal{A}^*_{\tilde{M},F}, \tau) \to Stab(W^M, \tau/i\mathcal{A}^*_{\tilde{M},F}) \to 1$$

Donc

$$|Stab(W^M, \tau/i\mathcal{A}^*_{\tilde{M},F})||Stab(i\mathcal{A}^*_{\tilde{M},F}, \underline{\sigma})| = |Stab(W^M \times i\mathcal{A}^*_{\tilde{M},F}, \tau)|.$$

En appliquant les définitions de 2.9, on a aussi

$$|Stab(W^M \times i\mathcal{A}^*_{\tilde{M},F}, \tau)| = |W^{M_{disc}}||W_0^M(\underline{\sigma})||\mathbf{Stab}(W^M \times i\mathcal{A}^*_{\tilde{M},F}, \tau)|.$$

On conclut

$$C(\tau) = |\mathbf{Stab}(W^M \times i\mathcal{A}^*_{\tilde{M},F}, \tau)|.$$

Alors (12) devient

$$X(\tilde{M}) = (-1)^{a_{\tilde{M}} - a_{\tilde{G}}} J^{\tilde{G}}_{\tilde{M},spec}(\omega, f_1, f_2).$$

Ce terme ne dépendant que de la classe de conjugaison de $\tilde{M}$, on vérifie que la somme (11) est égale à

$$(14) \qquad \sum_{\tilde{M}\in\mathcal{L}(\tilde{M}_0)} |\tilde{W}^M||\tilde{W}^G|^{-1}X(\tilde{M})$$

En effet, les deux termes sont égaux à

$$\sum_{\tilde{P}=\tilde{M}U_P;P_0\subset P} |\mathcal{P}(\tilde{M})|^{-1}X(\tilde{M}).$$

On se rappelle que (11) est le terme constant de l'élément de $PolExp$ asymptote à $J^T(\omega, f_1, f_2)$. D'après la formule ci-dessus calculant $X(\tilde{M})$, (14) est égal à $J^{\tilde{G}}_{spec}(\omega, f_1, f_2)$. Cela prouve la proposition. $\square$

# 4 Le calcul géométrique

## 4.1 La formule de Weyl

Pour quelques instants, nous allons considérer des sous-groupes algébriques de $G$ qui ne sont pas forcément définis sur $F$. Considérons un sous-groupe de Borel $B$ de $G$ et un sous-tore maximal $T$ de $B$. On suppose $T$ défini sur $F$ mais $B$ défini seulement sur la clôture algébrique $\bar{F}$ de $F$. On définit leur normalisateur commun $\tilde{T} = \{\gamma \in \tilde{G}; ad_\gamma(T) = T, ad_\gamma(B) = B\}$. On dit que $\tilde{T}$ est un tore tordu maximal de $\tilde{G}$ si et seulement si $\tilde{T} \cap \tilde{G}(F) \neq \emptyset$. Remarquons que cela entraîne que $\tilde{T}$ est défini sur $F$ : si on choisit $\gamma \in \tilde{T} \cap \tilde{G}(F)$, on a $\tilde{T} = T\gamma = \gamma T$. Remarquons aussi qu'à tout tore tordu maximal $\tilde{T}$ est associé un sous-tore maximal $T$ de $G$. Pour $\gamma \in \tilde{T}(F)$, la restriction de $ad_\gamma$ à $\tilde{T}$ ne dépend pas de $\gamma$. On la note simplement $\theta$. On note $A_T$ le plus grand sous-tore déployé de $T$ et $A_{\tilde{T}}$ le plus grand sous-tore contenu dans le sous-groupe $A_T^\theta$ des points fixes par $\theta$ (autrement dit, $A_{\tilde{T}}$ est la composante neutre $A_T^{\theta,0}$ de $A_T^\theta$). On dit que $\tilde{T}$ est elliptique dans $\tilde{G}$ si $A_{\tilde{T}} = A_{\tilde{G}}$. En général, notons $M$ le commutant de $A_{\tilde{T}}$ dans $G$ et posons $\tilde{M} = M\tilde{T}$. Alors $\tilde{M}$ est un espace de Levi et $\tilde{T}$ est un tordu maximal et elliptique de $\tilde{M}$.

Pour tout tore tordu maximal $\tilde{T}$, on munit le groupe $T^\theta(F)$ d'une mesure de Haar. On suppose que, si deux tores tordus maximaux sont conjugués par un élément de $G(F)$, cette conjugaison est compatible aux mesures.

Soit $\tilde{T}$ un tore tordu maximal. Le groupe $T(F)$ agit sur $\tilde{T}(F)$ par conjugaison. L'ensemble des classes de conjugaison est le quotient $\tilde{T}(F)/(1-\theta)(T(F)) = (1-\theta)(T(F))\backslash\tilde{T}(F)$, où $(1-\theta)(T(F)) = \{t\theta(t^{-1}); t \in T(F)\}$. Pour $\gamma \in \tilde{T}(F)$, l'application naturelle

$$\begin{array}{ccc} T^{\theta,0}(F) & \to & \tilde{T}(F)/(1-\theta)(T(F)) \\ t & \mapsto & t\gamma \end{array}$$

est un isomorphisme local. On munit $\tilde{T}(F)/(1-\theta)(T(F))$ de la mesure invariante par translation à droite ou à gauche par $T(F)$ et telle que l'application ci-dessus préserve localement les mesures. Il est immédiat que cette définition ne dépend pas du choix de $\gamma$. On pose

$$W^G(\tilde{T}) = Norm_{G(F)}(\tilde{T})/T(F).$$

L'ensemble des classes de conjugaison par $G(F)$ de tores tordus maximaux est fini. Fixons un ensemble de représentants $T(\tilde{G})$. On note $T_{ell}(\tilde{G})$ le sous-ensemble des éléments elliptiques de $T(\tilde{G})$.

Pour $\gamma \in \tilde{G}$, on note $Z_G(\gamma)$ son centralisateur dans $G$ (l'ensemble des $x \in G$ tels que $x\gamma x^{-1} = \gamma$) et $G_\gamma$ la composante neutre de $Z_G(\gamma)$. On dit que $\gamma$ est fortement régulier si et seulement si $G_\gamma$ est un tore et $Z_G(\gamma)$ est commutatif. Un tel élément est semi-simple. On note $G_{reg}$ l'ensemble des éléments fortement réguliers. Un élément $\gamma \in G_{reg}(F)$ appartient à un unique tore tordu maximal : c'est $\tilde{T} = T\gamma$, où $T$ est le commutant de $G_\gamma$ dans $G$. On définit une fonction $D^{\tilde{G}}$ sur $\tilde{G}(F)$ de la façon suivante. Si $\gamma \in \tilde{G}(F)$ est semi-simple, $D^{\tilde{G}}(\gamma)$ est la valeur absolue du déterminant de $1 - ad_\gamma$ agissant sur $\mathfrak{g}/\mathfrak{g}_\gamma$, où on note par des lettres gothiques les algèbres de Lie. Si $\gamma$ est quelconque, $D^{\tilde{G}}(\gamma) = D^{\tilde{G}}(\gamma_{ss})$, où $\gamma_{ss}$ est la partie semi-simple de $\gamma$.

La formule d'intégration de Weyl prend l'une ou l'autre des deux formes suivantes, pour une fonction $f \in C_c^\infty(\tilde{G}(F))$ :

$$\int_{\tilde{G}(F)} f(\gamma)\, d\gamma = \sum_{\tilde{T} \in T(\tilde{G})} |W^G(\tilde{T})|^{-1} \int_{\tilde{T}(F)/(1-\theta)(T(F))} \int_{T^\theta(F)\backslash G(F)} f(x^{-1}\gamma x)\, dx\, D^{\tilde{G}}(\gamma)\, d\gamma$$

$$= \textstyle\sum_{\tilde{M} \in \mathcal{L}(\tilde{M}_0)} |\tilde{W}^M||\tilde{W}^G|^{-1} \sum_{\tilde{T} \in T_{ell}(\tilde{M})} |W^M(\tilde{T})|^{-1}$$

$$\int_{\tilde{T}(F)/(1-\theta)(T(F))} \int_{T^\theta(F)\backslash G(F)} f(x^{-1}\gamma x)\, dx\, D^{\tilde{G}}(\gamma)\, d\gamma.$$

## 4.2 Quelques majorations

Soient $f \in C_c^\infty(\tilde{G}(F))$ et $\gamma \in \tilde{G}_{reg}(F)$ tel que $\omega$ soit trivial sur $Z_G(\gamma, F)$. On pose

$$I_{\tilde{G}}(\gamma, \omega, f) = D^{\tilde{G}}(\gamma)^{1/2} \int_{Z_G(\gamma,F)\backslash G(F)} \omega(x) f(x^{-1}\gamma x)\, dx.$$

Par définition, c'est l'intégrale orbitale de $f$ en $\gamma$. Si $\omega$ n'est pas trivial sur $Z_G(\gamma, F)$, on pose $I_{\tilde{G}}(\gamma, \omega, f) = 0$.

Dans le cas où le caractère $\omega$ est trivial, on note simplement $I_{\tilde{G}}(\gamma, f) = I_{\tilde{G}}(\gamma, \omega, f)$.

Soit $\tilde{T}$ un tore tordu maximal de $\tilde{G}$. Supposons $\omega$ trivial sur $T^\theta(F)$. On a

(1) la fonction $\gamma \mapsto I_{\tilde{G}}(\gamma, \omega, f)$ est bornée sur $\tilde{T}(F)$.

Preuve. Il existe une fonction $f' \in C_c^\infty(\tilde{G}(F))$, à valeurs positives ou nulles, de sorte que $|f(\gamma)| \leq f'(\gamma)$ pour tout $\gamma \in \tilde{G}(F)$. Alors

$$|I_{\tilde{G}}(\gamma, \omega, f)| \leq I_{\tilde{G}}(\gamma, f').$$

Il suffit de majorer le membre de droite. En oubliant cette construction, on peut supposer $\omega = 1$ et $f$ à valeurs positives ou nulles. La fonction $\gamma \mapsto I_{\tilde{G}}(\gamma, f)$ sur $\tilde{T}(F)$ se quotiente en une fonction sur $\tilde{T}(F)/(1-\theta)(T(F))$ qui est à support compact. Il suffit de vérifier qu'elle est localement bornée. Il suffit de fixer $\gamma \in \tilde{T}(F)$ et de trouver un voisinage $U$ de 0 dans $\mathfrak{t}^\theta(F)$ tel que la fonction soit bornée sur $exp(U)\gamma$. Mais la théorie de la descente vaut dans le cas tordu. Elle entraîne que l'on peut trouver un tel voisinage $U$ et une fonction $\varphi \in C_c^\infty(\mathfrak{g}_\gamma(F))$ de sorte que

$$I_{\tilde{G}}(exp(X)\gamma, f) = I_{G_{\gamma_0}}(X, \varphi)$$

pour tout $X \in U$ tel que $exp(X)\gamma \in \tilde{G}_{reg}(F)$, avec une définition évidente de l'intégrale de droite. Le membre de droite est borné d'après Harish-Chandra. $\square$

On a

(2) il existe $\eta > 0$ tel que la fonction $\gamma \mapsto D^{\tilde{G}}(\gamma)^{-\eta}$ soit localement intégrable sur $\tilde{T}(F)/(1-\theta)(T(F))$.

Preuve. Il suffit de prouver l'existence de $\eta > 0$ tel que, pour tout $\gamma \in \tilde{T}(F)$, la fonction $X \mapsto D^{\tilde{G}}(exp(X)\gamma)^{-\eta}$ est intégrable au voisinage de 0 dans $\mathfrak{t}^\theta(F)$. Pour $X$ proche de 0, on a $D^{\tilde{G}}(exp(X)\gamma) = D^{\tilde{G}}(\gamma)D^{G_\gamma}(exp(X))$. D'après Harish-Chandra, il existe $\eta_\gamma > 0$ tel que $X \mapsto D^{G_\gamma}(exp(X))^{-\eta_\gamma}$ soit intégrable au voisinage de 0. Le réel $\eta_\gamma$ ne dépend en fait que du groupe $G_\gamma$. Or il n'y a qu'un nombre fini de tels commutants possibles. En prenant pour $\eta$ le plus petit des réels $\eta_\gamma$, on obtient (2). $\square$

On fixe une norme $||.||$ sur $G(F)$ selon la méthode habituelle. On suppose qu'elle est biinvariante par $K$ et que $||g|| \geq 1$ pour tout $g \in G(F)$. On rappelle que, pour tout $g \in G(F)$, on a défini $h_0(g) \in \mathcal{A}_0^{\geq}$. Les fonctions $1 + log(||g||)$ et $1 + |h_0(g)|$ sont équivalentes. Fixons $\gamma_0 \in \tilde{G}(F)$. On définit une norme sur $\tilde{G}(F)$ par $||\gamma|| = ||g||$ si $\gamma = g\gamma_0$ avec $g \in G(F)$. Elle dépend du point-base $\gamma_0$ mais sa classe d'équivalence (en un sens plus ou moins clair) n'en dépend pas.

**Lemme**. *Soit $\tilde{T}$ un tore tordu maximal de $\tilde{G}$. Il existe deux entiers $N, k > 0$ et un réel $c > 0$ tels que l'on ait les majorations*

*(i) $inf_{t \in T^{\theta,0}(F)}||tx|| \leq c(inf_{t\in T^{\theta,0}(F)}||t\gamma||)^N||x^{-1}\gamma x||^N D^{\tilde{G}}(\gamma)^{-k}$*

*(ii) $inf_{t\in T(F)}||tx|| \leq c||x^{-1}\gamma x||^N D^{\tilde{G}}(\gamma)^{-k}$*

*pour tout $x \in G(F)$ et tout $\gamma \in \tilde{T}(F) \cap \tilde{G}_{reg}(F)$.*

Preuve. La preuve reprend celle du lemme 4.2 de [A1]. Considérons une extension galoisienne finie $F'$ de $F$ que l'on précisera plus tard. On fixe comme précédemment des normes sur $G(F')$ et $\tilde{G}(F')$, notons-les pour un instant $||.||_{F'}$. Il existe un entier $N_1 \geq 1$ tel que l'on ait les majorations

$$||x|| << ||x||_{F'}^{N_1}, \ ||x||_{F'} << ||x||^{N_1}$$

pour tout $x \in G(F)$ et on a des majorations similaires pour $\gamma \in \tilde{G}(F)$. On voit que l'énoncé est équivalent à celui obtenu en remplaçant $||.||$ par $||.||_{F'}$ dans les inégalités (i) et (ii). On peut donc travailler avec les seules normes $||.||_{F'}$ et simplifier la notation pour le reste de la preuve en abandonnant les indices $F'$.

Soit $S$ un sous-tore de $G$ défini sur $F$, pas forcément maximal. On montre d'abord

(3) il existe un entier $N_2$ tel que l'on ait la majoration

$$inf_{t\in S(F)}||tx|| << (inf_{t\in S(F')}||tx||)^{N_2}$$

pour tout $x \in G(F)$.

Notons $d$ le degré de l'extension $F'/F$ et $S(F')^d$ le sous-groupe des puissances $d$-ièmes dans $S(F')$. Le quotient $S(F')/S(F')^d$ est compact, d'où une majoration

$$(4) \qquad inf_{t\in S(F')^d}||tx|| << inf_{t\in S(F')}||tx||$$

pour tout $x \in G(F')$. Fixons $x \in G(F)$, posons $X = inf_{t\in S(F')^d}||tx||$ et choisissons $u \in S(F')$ tel que $||u^d x|| = X$ (il est à peu près clair que la borne inférieure est atteinte). Pour $\sigma \in Gal(F'/F)$, l'application $y \mapsto ||\sigma(y)||$ est encore une norme sur $G(F')$, il y a donc un entier $N_3 \geq 1$ tel que $||\sigma(y)|| << ||y||^{N_3}$ pour tout $y \in G(F')$ et tout $\sigma \in Gal(F'/F)$. Donc $||\sigma(u)^d x|| << X^{N_3}$ pour tout $\sigma$. Parce que $\sigma(u)^d u^{-d} = \sigma(u)^d x(u^d x)^{-1}$, on en déduit l'existence de $N_4 \geq 1$ tel que $||\sigma(u)^d u^{-d}|| << X^{N_4}$. On vérifie qu'il existe $N_5 \geq 1$ tel que $||v|| << ||v^d||^{N_5}$ pour tout $v \in S(F')$. D'où $||\sigma(u)u^{-1}|| << X^{N_4 N_5}$. Posons $v = \prod_{\sigma\in Gal(F'/F)} \sigma(u)$. On a $vx = (\prod_{\sigma\in Gal(F'/F)} \sigma(u)u^{-1})u^d x$, d'où l'existence de $N_6 \geq 1$ tel que $||vx|| << X^{N_6}$. Mais $v \in S(F)$. Donc $inf_{t\in S(F)}||tx|| << X^{N_6}$. Jointe à (4), cette relation démontre (3).

On choisit $F'$ de sorte que $T$ soit déployé sur $F'$. En appliquant (3) à $S = T^{\theta,0}$ ou $S = T$, on voit que les assertions de l'énoncé sont équivalentes aux mêmes assertions où l'on remplace le corps de base $F$ par $F'$. En oubliant cette construction, on peut supposer que $T$ est déployé sur $F$. On fixe un sous-groupe de Borel $B = TU$ de $G$ contenant $T$. La décomposition d'Iwasawa montre que l'on peut se limiter à prouver l'énoncé pour $x \in B(F)$. Ecrivons $x = yu$ avec $y \in T(F)$ et $u \in U(F)$. Pour $S = T^{\theta,0}$ ou $S = T$, il existe $N_7 \geq 1$ tel que

$$(5) \qquad inf_{t\in S(F)}||tx|| << (inf_{t\in S(F)}||ty||)^{N_7}||u||^{N_7}.$$

On a $x^{-1}\gamma x = u'\gamma'$, où $\gamma' = y^{-1}\gamma y$ et $u' = u^{-1}ad_{\gamma'}(u)$. Il résulte de la filtration habituelle du groupe unipotent $U$ que les coefficients de $u$ sont des fractions rationnelles en les coefficients de $\gamma'$ et $u'$, avec pour dénominateurs des puissances de $det((ad_{\gamma'} - 1)_{|\mathfrak{g}/\mathfrak{t}^\theta})$. Il y a donc des entiers $N_8, k_1 \geq 1$ tels que $||u|| << ||x^{-1}\gamma x||^{N_8} D^{\tilde{G}}(\gamma')^{-k_1}$. Puisque $D^{\tilde{G}}(\gamma') = D^{\tilde{G}}(\gamma)$, la relation (5) nous ramène à prouver l'existence d'un entier $N_9 \geq 1$ tel que

$$(6) \qquad inf_{t\in S(F)}||ty|| << (inf_{t\in S(F)}||t\gamma||)^{N_9}||y^{-1}\gamma y||^{N_9}.$$

Le cas où $S = T$ (qui concerne le (ii) de l'énoncé) est trivial puisque le terme de gauche vaut 1. On suppose maintenant $S = T^{\theta,0}$. Parce que les deux groupes $(1-\theta)(T(F))$ et $T^{\theta,0}(F)$ sont d'intersection finie et que leur produit est un sous-groupe d'indice fini de $T(F)$, on vérifie qu'il existe $N_{10} \geq 1$ tel que

$$inf_{t\in T^{\theta,0}(F)}||ty|| << (inf_{t\in T^{\theta,0}(F)}||ty^{-1}\theta(y)||)^{N_{10}}.$$

Soit $t' \in T^{\theta,0}(F)$ tel que $||(t')^{-1}\gamma||$ soit minimal, posons $\gamma' = (t')^{-1}\gamma$. Alors

$$inf_{t\in T^{\theta,0}(F)}||ty|| << ||t'y^{-1}\theta(y)||^{N_{10}} << ||t'y^{-1}\theta(y)\gamma'||^{N_{11}}||\gamma'||^{N_{11}}$$

pour un certain $N_{11} \geq 1$. Mais $t'y^{-1}\theta(y)\gamma' = y^{-1}\gamma y$ et $||\gamma'|| = inf_{t\in T^{\theta,0}(F)}||t\gamma||$. La relation précédente n'est autre que (6). Cela achève la preuve. $\square$

Le lemme entraîne évidemment

(7) il existe un entier $k \geq 0$ et, pour tous sous-ensembles compacts $\mathbf{\Omega}$ de $\tilde{G}(F)$ et $\Omega$ de $\tilde{T}(F)$, il existe $c > 0$ tel que l'on ait la majoration

$$inf_{t\in T^{\theta,0}(F)}||tx|| \leq cD^{\tilde{G}}(\gamma)^{-k}$$

pour tout couple $(x,\gamma)$ tel que $x \in G(F)$, $\gamma \in \Omega \cap \tilde{G}_{reg}(F)$ et $x^{-1}\gamma x \in \mathbf{\Omega}$.

## 4.3 Application de la formule de Weyl

On a défini l'intégrale $J^T(\omega, f_1, f_2)$ en 3.1. C'est une intégrale à support compact. On applique la formule de Weyl sous sa deuxième forme à l'intégrale intérieure en $\gamma$. On obtient

$$(1) \qquad J^T(\omega, f_1, f_2) = \sum_{\tilde{M}\in\mathcal{L}(\tilde{M}_0)} |\tilde{W}^M||\tilde{W}^G|^{-1} \sum_{\tilde{S}\in T_{ell}(\tilde{M})} J^T_{\tilde{M},\tilde{S}}(\omega, f_1, f_2),$$

où

$$J^T_{\tilde{M},\tilde{S}}(\omega, f_1, f_2) = |W^M(\tilde{S})|^{-1} \int_{\tilde{S}(F)/(1-\theta)(S(F))} \int_{S^\theta(F)\backslash G(F)}$$

$$\int_{A_{\tilde{G}}(F)\backslash G(F)} \bar{f}_1(x^{-1}\gamma x) f_2(g^{-1}x^{-1}\gamma x g)\omega(g)\tilde{\kappa}^T(g)\, dg\, dx\, D^{\tilde{G}}(\gamma)\, d\gamma.$$

On a noté nos tores $\tilde{S}$ plutôt que $\tilde{T}$ pour éviter les confusions avec le paramètre $T$.

On fixe jusqu'en 4.8 un espace de Levi $\tilde{M}$ contenant $\tilde{M}_0$ et un tore tordu elliptique $\tilde{S}$ de $\tilde{M}$. Par changement de variables $g \mapsto x^{-1}y$, on a

$$J^T_{\tilde{M},\tilde{S}}(\omega, f_1, f_2) = |W^M(\tilde{S})|^{-1} \int_{\tilde{S}(F)/(1-\theta)(S(F))} \int_{S^\theta(F)\backslash G(F)}$$

$$\int_{A_{\tilde{G}}(F)\backslash G(F)} \bar{f}_1(x^{-1}\gamma x) f_2(y^{-1}\gamma y)\omega(x^{-1}y)\tilde{\kappa}^T(x^{-1}y)\, dy\, dx\, D^{\tilde{G}}(\gamma)\, d\gamma.$$

Pour tout $\gamma$, la fonction $y \mapsto f_2(y^{-1}\gamma y)$ est invariante par $S^\theta(F)$, a fortiori par $A_{\tilde{S}}(F) = A_{\tilde{M}}(F)$. D'où

$$J^T_{\tilde{M},\tilde{S}}(\omega, f_1, f_2) = |W^M(\tilde{S})|^{-1} \int_{\tilde{S}(F)/(1-\theta)(S(F))} \int_{S^\theta(F)\backslash G(F)}$$

$$\int_{A_{\tilde{M}}(F)\backslash G(F)} \bar{f}_1(x^{-1}\gamma x) f_2(y^{-1}\gamma y)\omega(x^{-1}y) u^T_{\tilde{M}}(x,y)\, dy\, dx\, D^{\tilde{G}}(\gamma)\, d\gamma,$$

où

$$u^T_{\tilde{M}}(x,y) = \int_{A_{\tilde{G}}(F)\backslash A_{\tilde{M}}(F)} \omega(a)\tilde{\kappa}^T(x^{-1}ay)\, da.$$

Soient $x, y \in G(F)$. Pour $\tilde{P} \in \mathcal{F}(\tilde{M})$, on a défini $T[\tilde{P}]$ en 1.3. On pose $Y(x,y,T;\tilde{P}) = T[\tilde{P}] + H_{\tilde{P}}(x) - H_{\tilde{P}}(y)$. La famille $\mathcal{Y}(x,y,T) = (Y(x,y,T;\tilde{P}))_{\tilde{P}\in\mathcal{P}(\tilde{M})}$ est $(\tilde{G},\tilde{M})$-orthogonale. On introduit la fonction $H \mapsto \Gamma_{\tilde{M}}(H, \mathcal{Y}(x,y,T))$ sur $\mathcal{A}_{\tilde{M}}$, cf. 2.2. Rappelons que l'on note $A_{\tilde{M}}(F)_c$ le plus grand sous-groupe compact de $A_{\tilde{M}}(F)$, c'est-à-dire le sous-groupe des $a \in A_{\tilde{M}}(F)$ tels que $H_{\tilde{M}}(a) = 0$. Si la restriction de $\omega$ à ce groupe est non triviale, on pose

$$v^T_{\tilde{M}}(x,y) = 0.$$

Supposons maintenant que la restriction de $\omega$ à $A_{\tilde{M}}(F)_c$ est triviale. Alors $\omega$ se factorise en un caractère de $\mathcal{A}_{A_{\tilde{M}},F}$ que l'on note encore $\omega$. On pose alors

$$v^T_{\tilde{M}}(x,y) = C \int_{\mathcal{A}_{A_{\tilde{G}},F}\backslash\mathcal{A}_{A_{\tilde{M}},F}} \Gamma_{\tilde{M}}(H, \mathcal{Y}(x,y,T))\omega(H)\, dH,$$

où
$$C=mes(A_{\tilde{M}}(F)_c)mes(A_{\tilde{G}}(F)_c)^{-1}.$$

Posons
$$J^T_{v,\tilde{M},\tilde{S}}(\omega,f_1,f_2)=|W^M(\tilde{S})|^{-1}\int_{\tilde{S}(F)/(1-\theta)(S(F))}\int_{S^\theta(F)\backslash G(F)}$$
$$\int_{A_{\tilde{M}}(F)\backslash G(F)}\bar{f}_1(x^{-1}\gamma x)f_2(y^{-1}\gamma y)\omega(x^{-1}y)v^T_{\tilde{M}}(x,y)\,dy\,dx\,D^{\tilde{G}}(\gamma)\,d\gamma.$$

**Proposition**. *L'expression ci-dessus est absolument convergente. Pour tout réel $r$, on a la majoration*
$$|J^T_{\tilde{M},\tilde{S}}(\omega,f_1,f_2)-J^T_{v,\tilde{M},\tilde{S}}(\omega,f_1,f_2)|<<|T|^{-r}$$
*pour tout $T$.*

Cette proposition sera prouvée en 4.6.

Dans les formules définissant $J^T_{\tilde{M},\tilde{S}}(\omega,f_1,f_2)$ et $J^T_{v,\tilde{M},\tilde{S}}(\omega,f_1,f_2)$, les variables d'intégration $\gamma$, $x$ et $y$ appartiennent à des ensembles quotients mais il convient de les relever dans $\tilde{S}(F)$, resp. $G(F)$. On fixe un sous-ensemble compact $\boldsymbol{\Omega}$ de $\tilde{G}(F)$ contenant les supports de $f_1$ et $f_2$. L'ensemble des éléments de $\tilde{S}(F)/(1-\theta)(S(F))$ dont la classe de conjugaison coupe $\boldsymbol{\Omega}$ est compact. On peut donc fixer un sous-ensemble compact $\Omega$ de $\tilde{S}(F)$ et supposer

(2) $\gamma\in\Omega$.

Appliquons 4.2(7). Puisque $S^{\theta,0}(F)/A_{\tilde{M}}(F)$ est compact, on peut remplacer dans cette relation le groupe $S^{\theta,0}(F)$ par $A_{\tilde{M}}(F)$. Cela nous permet de supposer
$$(3)\qquad ||x||,||y||\leq cD^{\tilde{G}}(\gamma)^{-k}.$$

## 4.4 Une majoration de $u^T_{\tilde{M}}(x,y)$ et $v^T_{\tilde{M}}(x,y)$

Fixons $\epsilon>0$. Notons $\chi^T_\epsilon$ la fonction caractéristique des $\gamma\in\tilde{S}(F)/(1-\theta)(S(F))$ tels que $D^{\tilde{G}}(\gamma)\leq e^{-\epsilon|T|}$.

**Lemme**. *Pour tout réel $r$, on a la majoration*
$$\int_{\tilde{S}(F)/(1-\theta)(S(F))}\int_{S^\theta(F)\backslash G(F)}\int_{A_{\tilde{M}}(F)\backslash G(F)}|f_1(x^{-1}\gamma x)f_2(y^{-1}\gamma y)|$$
$$(|u^T_{\tilde{M}}(x,y)|+|v^T_{\tilde{M}}(x,y)|)\,dy\,dx\,\chi^T_\epsilon(\gamma)D^{\tilde{G}}(\gamma)\,d\gamma<<|T|^{-r}$$
*pour tout $T$.*

Preuve. Il suffit de traiter le cas où $\omega=1$ et les fonctions $f_1$ et $f_2$ sont à valeurs positives ou nulles. Montrons qu'il existe un entier $D>0$ tel que, pour $x$ et $y$ vérifiant 4.3(3), on ait la majoration
$$(1)\qquad |u^T_{\tilde{M}}(x,y)|<<(|T|+|log(D^{\tilde{G}}(\gamma))|)^D.$$

On a une majoration
$$log(||g||) << |T| + |H_G(g)|$$
pour tout $g \in G(F)$ tel que $\tilde{\kappa}^T(g) = 1$. Le terme $u^T_{\tilde{M}}(x,y)$ est défini par une intégration sur $A_{\tilde{M}}(F)/A_{\tilde{G}}(F)$. Il existe un ensemble fini $\mathbf{b} \subset \mathcal{A}_{\tilde{G}}$ tel qu'en posant $A_{\tilde{M}}(F)^{\mathbf{b}} = \{a \in A_{\tilde{M}}(F); H_{\tilde{G}}(a) \in \mathbf{b}\}$, on ait
$$|u^T_{\tilde{M}}(x,y)| << \int_{A_{\tilde{M}}(F)^{\mathbf{b}}} \tilde{\kappa}^T(x^{-1}ay)\, da.$$
Pour $a$ dans l'ensemble d'intégration, on a
$$log(||a||) << |T| + log(||x||) + log(||y||),$$
d'où
$$log(||a||) << |T| + |log(D^{\tilde{G}}(\gamma))|$$
d'après 4.3(3). L'intégrale est alors essentiellement bornée par la mesure des $H \in \mathcal{A}_{A_{\tilde{M}},F}$ tels que $|H|$ soit majoré par le membre de droite ci-dessus. On en déduit (1).

Une preuve similaire montre que la fonction $v^T_{\tilde{M}}(x,y)$ vérifie la même propriété.

D'après les explications de la fin du paragraphe précédent, l'intégrale de l'énoncé est donc majorée par
$$\int_{\tilde{S}(F)/(1-\theta)(S(F))} \int_{S^\theta(F)\backslash G(F)} \int_{A_{\tilde{M}}(F)\backslash G(F)} f_1(x^{-1}\gamma x) f_2(y^{-1}\gamma y)$$
$$(|T| + |log(D^{\tilde{G}}(\gamma))|)^D \, dy\, dx\, \chi^T_\epsilon(\gamma) D^{\tilde{G}}(\gamma)\, d\gamma$$
$$<< \int_{\tilde{S}(F)/(1-\theta)(S(F))} I_{\tilde{G}}(\gamma, f_1) I_{\tilde{G}}(\gamma, f_2)(|T| + |log(D^{\tilde{G}}(\gamma))|)^D \chi^T_\epsilon(\gamma)\, d\gamma.$$
On choisit $\eta$ comme en 4.2(2). Dans le domaine où les fonctions à intégrer ne sont pas nulles, on a
$$(|T| + |log(D^{\tilde{G}}(\gamma))|)^D << |T|^D D^{\tilde{G}}(\gamma)^{-\eta/2},$$
$$\chi^T_\epsilon(\gamma) \leq e^{-\epsilon\eta|T|/2} D^{\tilde{G}}(\gamma)^{-\eta/2}.$$
En utilisant aussi 4.2(1), on voit que l'intégrale ci-dessus est donc essentiellement majorée par
$$|T|^D e^{-\epsilon\eta|T|/2} \int_\Omega D^{\tilde{G}}(\gamma)^{-\eta}\, d\gamma.$$
La dernière intégrale est convergente et le lemme s'ensuit. $\square$

## 4.5 Majoration de $u_{\tilde{M}}(x,y) - v_{\tilde{M}}(x,y)$

**Lemme**. *Il existe $\epsilon > 0$ tel que, pour tout réel $r$, on ait la majoration*
$$|u^T_{\tilde{M}}(x,y) - v^T_{\tilde{M}}(x,y)| << |T|^{-r}$$
*pour tout $T$ et tous $x, y \in G(F)$ tels que $||x||, ||y|| \leq e^{\epsilon|T|}$.*

Preuve. Fixons $\epsilon' > 0$ que l'on précisera plus tard. On note $\epsilon'\mathcal{T}$ la famille de points $(\epsilon' T[\tilde{P}])_{\tilde{P}\in\mathcal{P}(\tilde{M})}$. Pour $\tilde{Q} = \tilde{L}U_Q \in \mathcal{F}(\tilde{M})$, posons

$$u^T_{\tilde{M}}(x,y,\tilde{Q}) = \int_{A_{\tilde{M}}(F)/A_{\tilde{G}}(F)} \omega(a)\tilde{\kappa}^T(x^{-1}ay)\Gamma^{\tilde{Q}}_{\tilde{M}}(H_{\tilde{M}}(a),\epsilon'\mathcal{T})\tau^{\tilde{G}}_{\tilde{Q}}(H_{\tilde{L}}(a)-\epsilon'T[\tilde{Q}])\,da.$$

Si $\omega$ est non trivial sur $A_{\tilde{M}}(F)_c$, posons $v^T_{\tilde{M}}(x,y,\tilde{Q}) = 0$. Sinon, posons

$$v^T_{\tilde{M}}(x,y,\tilde{Q}) = C\int_{\mathcal{A}_{A_{\tilde{M}},F}/\mathcal{A}_{A_{\tilde{G}},F}} \omega(H)\Gamma^{\tilde{G}}_{\tilde{M}}(H,\mathcal{Y}(x,y,T))\Gamma^{\tilde{Q}}_{\tilde{M}}(H,\epsilon'\mathcal{T})\tau^{\tilde{G}}_{\tilde{Q}}(H-\epsilon'T[\tilde{Q}])\,dH.$$

L'égalité 1.3(6) nous permet d'écrire

$$u^T_{\tilde{M}}(x,y) = \sum_{\tilde{Q}\in\mathcal{F}(\tilde{M})} u^T_{\tilde{M}}(x,y;\tilde{Q}),$$

$$v^T_{\tilde{M}}(x,y) = \sum_{\tilde{Q}\in\mathcal{F}(\tilde{M})} v^T_{\tilde{M}}(x,y;\tilde{Q}).$$

On peut fixer $\tilde{Q}$ et majorer $|u^T_{\tilde{M}}(x,y,\tilde{Q}) - v^T_{\tilde{M}}(x,y,\tilde{Q})|$. Ecrivons $x = ulk$, $y = \bar{u}'l'k'$, avec $l, l' \in L(F)$, $u \in U_Q(F)$, $\bar{u}' \in U_{\bar{Q}}(F)$, $k, k' \in K$. Soit $a \in A_{\tilde{M}}(F)$ tel que

(1) $\Gamma^{\tilde{Q}}_{\tilde{M}}(H_{\tilde{M}}(a),\epsilon'\mathcal{T})\tau^{\tilde{G}}_{\tilde{Q}}(H_{\tilde{M}}(a)-\epsilon'T[\tilde{Q}]) = 1.$

On a $x^{-1}ay = k^{-1}hl^{-1}al'h'k'$, avec $h' = (a\bar{u}'l')^{-1}ua\bar{u}'l'$, $h = l^{-1}a\bar{u}'a^{-1}l$. Les éléments $u$, $\bar{u}'$, $h'$ et $h$ sont unipotents, écrivons $u = exp(Y)$, $\bar{u}' = exp(Y')$, $h = exp(X)$, $h' = exp(X')$. Munissons $\mathfrak{g}(F)$ d'une norme $|.|$. Parce qu'il s'agit d'éléments unipotents, on a des majorations $|Y| << ||u||^D$, $|Y'| << ||\bar{u}'||^D$ pour un entier $D$ convenable. Fixons $\epsilon$ et supposons $||x||, ||y|| \leq e^{\epsilon|T|}$. On a essentiellement la même majoration pour $l$, $u$, $l'$, $\bar{u}'$. On a donc aussi $|Y|, |Y'| << e^{D\epsilon|T|}$. L'élément $X$ se déduit de $Y'$ par conjugaison par $l^{-1}a$. Dans la suite interviendront des réels $c_1, c_2$ etc... que, pour simplifier, on n'introduira pas. A chaque fois, cela signifie qu'il existe un réel $c_1, c_2... > 0$, indépendant des données, tel que la relation soit vérifiée. Ainsi, la relation (1) entraîne

$$(2) \qquad |\alpha(a)| > e^{c_1\epsilon'|T|}$$

pour toute racine $\alpha$ de $A_{\tilde{M}}$ agissant dans $\mathfrak{u}_Q$. Ici $a$ agit dans $\mathfrak{u}_{\bar{Q}}$ et les racines y sont inférieures à $e^{-c_1\epsilon'|T|}$. La conjugaison par $l^{-1}$ est de norme bornée par $e^{D'\epsilon|T|}$ pour un entier convenable. On en déduit des majorations

$$(3)(a) \qquad |X| << e^{(c_2\epsilon - c_3\epsilon')|T|}.$$

De même,

$$(3)(b) \qquad |Y| << e^{(c_2\epsilon - c_3\epsilon')|T|}.$$

Supposons d'abord $F$ non archimédien. On suppose $c_2\epsilon - c_3\epsilon' < 0$. On peut toujours supposer $|T|$ assez grand (la majoration de l'énoncé étant triviale pour $|T|$ borné). Alors les relations ci-dessus entraînent que $h, h' \in K$. On a donc $\tilde{\kappa}^T(x^{-1}ay) = \tilde{\kappa}^T(l^{-1}al')$. Fixons un élément $\tilde{P} \in \mathcal{P}(\tilde{M})$ tel que $\tilde{P} \subset \tilde{Q}$ et un élément $w \in W^{\tilde{G}}$, relevé en un élément de $K$, tel que $\tilde{P}_0 \subset w(\tilde{P})$. Posons $\underline{\tilde{M}} = w(\tilde{M})$, $\underline{\tilde{L}} = w(\tilde{L})$, $\underline{\tilde{Q}} = w(\tilde{Q})$, $\underline{l} = wlw^{-1}$, $\underline{a} = waw^{-1}$, $\underline{l}' = wl'w^{-1}$. On a $\tilde{\kappa}^T(l^{-1}al') = \tilde{\kappa}^T(\underline{l}^{-1}\underline{a}\underline{l}')$. Fixons $u, u' \in K \cap \underline{L}(F)$ et $m \in M_0(F)^{\geq,\underline{Q}}$ tels que $\underline{l}^{-1}\underline{a}\underline{l}' = umu'$. On a

(4) si $\epsilon < c_4\epsilon'$ et $|T|$ est assez grand, alors $m \in M_0(F)^{\geq}$.

Il s'agit de prouver que $\alpha(m) \geq 1$ pour toute racine $\alpha$ de $A_0$ intervenant dans $\mathfrak{u}_{\underline{Q}}$. Il suffit de prouver que, pour tout $N \in \mathfrak{u}_{\underline{Q}}(F)$, on a $|ad_m(N)| \geq |N|$. En remplaçant $N$ par $ad_{u'(\underline{l}')^{-1}}(N)$, il suffit que, pour tout $N \in \mathfrak{u}_{\underline{Q}}(F)$, on ait

$$|ad_{u^{-1}\underline{l}^{-1}\underline{a}}(N)| \geq |ad_{u'(\underline{l}')^{-1}}(N)|.$$

On a

$$|ad_{u'(\underline{l}')^{-1}}(N)| << ||l'||^D|N|$$

pour un entier $D$ convenable, d'où

$$|ad_{u'(\underline{l}')^{-1}}(N)| << e^{c_5\epsilon|T|}|N|.$$

Posons $N' = ad_{u^{-1}\underline{l}^{-1}\underline{a}}(N)$. On a $ad_{\underline{a}}(N) = ad_{\underline{l}u}(N')$ d'où, par le même raisonnement

$$|ad_{\underline{a}}(N)| << e^{c_6\epsilon|T|}|N'|.$$

Mais pour $\alpha$ intervenant dans $\mathfrak{u}_{\underline{Q}}$, $\alpha(\underline{a})$ est minoré par la relation (2). On en déduit

$$|ad_{\underline{a}}(N)| >> e^{c_1\epsilon'|T|}|N|.$$

Toutes ces relations entraînent

$$|ad_{u'(\underline{l}')^{-1}}(N)| << e^{((c_5+c_6)\epsilon - c_1\epsilon')|T|}|N'|.$$

En supposant $(c_5+c_6)\epsilon - c_1\epsilon' < 0$, cela entraîne la majoration cherchée. Cela prouve (4).

On a

(5) si $\epsilon < \epsilon'$, alors

$$|H_0(m)^{\underline{\tilde{L}}}| \leq c_7\epsilon'|T|.$$

On fixe un ensemble fini $\mathbf{b} \subset \mathcal{A}_{\tilde{L},F}$ tel que $\mathcal{A}_{\tilde{L},F} \subset \mathcal{A}_{A_{\tilde{L}},F} + \mathbf{b}$. On peut choisir un élément $b \in A_{\tilde{L}}(F)$ tel que $H_{\tilde{L}}(\underline{a}) - H_{\tilde{L}}(b) \in \mathbf{b}$. Posons $\underline{a}' = \underline{a}b^{-1}$. La relation (1) entraîne $\Gamma_{\underline{\tilde{M}}}^{\underline{\tilde{Q}}}(H_{\underline{\tilde{M}}}(\underline{a}'), \epsilon'\mathcal{T}) = 1$. Puisque de plus $H_{\underline{\tilde{L}}}(\underline{a}') \in \mathbf{b}$, on a

$$|H_{\underline{\tilde{M}}}(\underline{a}')| \leq c_8\epsilon'|T|.$$

On en déduit une majoration

$$||a'|| << e^{c_9\epsilon'|T|}.$$

Posons $m' = mb^{-1}$. On a $H_0(m')^{\underline{\tilde{L}}} = H_0(m)^{\underline{\tilde{L}}}$. D'où une majoration

$$|H_0(m)^{\underline{\tilde{L}}}| \leq c_{10}log(||m'||).$$

Mais $m' = \underline{l}^{-1}\underline{a}'\underline{l}'$. Par un calcul maintenant familier, on en déduit

$$log(||m'||) \leq 1 + (c_9\epsilon' + c_{11}\epsilon)|T|.$$

La relation (5) résulte des deux majorations précédentes.

On suppose $\epsilon$, $\epsilon'$ et $T$ tels que (4) et (5) soient vérifiés. Montrons que

(6) si $\epsilon'$ est assez petit, on a l'égalité $\phi_{\tilde{P}_0}^{\tilde{G}}(H_0(m) - T) = \phi_{\underline{\tilde{Q}}}^{\tilde{G}}(H_{\underline{\tilde{L}}}(m) - T)$.

Notons simplement $H = H_{\tilde{P}_0}(m)$. L'égalité $\phi_{\tilde{P}_0}^{\tilde{G}}(H_0(m) - T) = 1$ équivaut à

(7) $<\varpi_{\tilde{\alpha}}, H-T>\leq 0$ pour tout $\tilde{\alpha}\in\Delta_{\tilde{P}_0}$.
L'égalité $\phi_{\underline{\tilde{Q}}}^{\tilde{G}}(H_{\underline{\tilde{L}}}(m)-T)=1$ équivaut à

(8) $<\varpi_{\tilde{\alpha}}, H-T>\leq 0$ pour tout $\tilde{\alpha}\in\Delta_{\tilde{P}_0}-\Delta_{\tilde{P}_0}^{\tilde{Q}}$.

Evidemment (7) entraîne (8). Inversement, supposons (8) vérifiée. Soit $\tilde{\alpha}\in\Delta_{\tilde{P}_0}^{\tilde{Q}}$. On a

$$<\varpi_{\tilde{\alpha}}, H-T>=<\varpi_{\tilde{\alpha}}, H^{\underline{\tilde{L}}}-T^{\underline{\tilde{L}}}>+<\varpi_{\tilde{\alpha}}, H_{\underline{\tilde{L}}}-T_{\underline{\tilde{L}}}>.$$

On va prouver que ces deux termes sont négatifs pourvu que $\epsilon'$ soit assez petit. Cela prouvera que (8) entraîne (7) et achèvera la preuve de (6). Le terme $H^{\underline{\tilde{L}}}$ est une projection de $H_0(m)^{\underline{\tilde{L}}}$. D'après (5), on a donc une majoration

$$|<\varpi_{\tilde{\alpha}}, H^{\underline{\tilde{L}}}>|\leq c_{12}\epsilon'|T|.$$

On a aussi facilement

$$<\varpi_{\tilde{\alpha}}, T>\geq c_{13}|T|.$$

Il résulte de ces deux inégalités que $<\varpi_{\tilde{\alpha}}, H^{\underline{\tilde{L}}}-T^{\underline{\tilde{L}}}>$ est négatif si $\epsilon'$ est assez petit. D'après (7), le terme $H_{\underline{\tilde{L}}}-T_{\underline{\tilde{L}}}$ est combinaison linéaire à coefficients négatifs ou nuls de termes $\check{\check{\tilde{\beta}}}_{\underline{\tilde{L}}}$ pour $\tilde{\beta}\in\Delta_{\tilde{P}_0}-\Delta_{\tilde{P}_0}^{\tilde{Q}}$. Il reste à voir que, pour un tel $\tilde{\beta}$, on a $<\varpi_{\tilde{\alpha}}, \check{\check{\tilde{\beta}}}_{\underline{\tilde{L}}}>\geq 0$. On a

$$<\varpi_{\tilde{\alpha}}, \check{\check{\tilde{\beta}}}_{\underline{\tilde{L}}}>=<\varpi_{\tilde{\alpha}}, \check{\check{\tilde{\beta}}}>-<\varpi_{\tilde{\alpha}}, \check{\check{\tilde{\beta}}}^{\underline{\tilde{L}}}>.$$

Le premier terme est nul puisque $\tilde{\alpha}\in\Delta_{\tilde{P}_0}^{\tilde{Q}}$ et $\tilde{\beta}\notin\Delta_{\tilde{P}_0}^{\tilde{Q}}$. Parce que $\Delta_{\tilde{P}_0}$ est une base aiguë, $\check{\check{\tilde{\beta}}}^{\underline{\tilde{L}}}$ appartient à la chambre négative fermée associée à $\Delta_{\tilde{P}_0}^{\tilde{Q}}$, a fortiori est combinaison linéaire à coefficients négatifs ou nuls de $\check{\check{\tilde{\alpha}}}'$ pour $\tilde{\alpha}'\in\Delta_{\tilde{P}_0}^{\tilde{Q}}$. Donc $<\varpi_{\tilde{\alpha}}, \check{\check{\tilde{\beta}}}^{\underline{\tilde{L}}}>\leq 0$. Cela achève la preuve de (6).

On a

(9) si $\epsilon'$ est assez petit, on a l'égalité $\tilde{\kappa}^T(x^{-1}ay)=\phi_{\tilde{Q}}^{\tilde{G}}(H_{\tilde{L}}(a)-H_{\tilde{Q}}(x)+H_{\tilde{\bar{Q}}}(y)-T[\tilde{Q}])$.

On a vu que $\tilde{\kappa}^T(x^{-1}ay)=\tilde{\kappa}^T(\underline{l}^{-1}\underline{a}\underline{l}')=\tilde{\kappa}^T(m)$. Puisque $m\in M_0(F)^{\geq}$ d'après (4), on a $\tilde{\kappa}^T(m)=\phi_{\tilde{P}_0}^{\tilde{G}}(H_0(m)-T)$. Grâce à (5), on a donc $\tilde{\kappa}^T(x^{-1}ay)=\phi_{\underline{\tilde{Q}}}^{\tilde{G}}(H_{\underline{\tilde{L}}}(m)-T)$ pourvu que $\epsilon'$ soit assez petit. Par conjugaison par $w$, cela entraîne $\tilde{\kappa}^T(x^{-1}ay)=\phi_{\tilde{Q}}^{\tilde{G}}(w^{-1}H_{\underline{\tilde{L}}}(m)-T[\tilde{Q}])$. Par définition de $m$, on a l'égalité

$$H_{\underline{\tilde{L}}}(m)=-H_{\underline{\tilde{L}}}(\underline{l})+H_{\underline{\tilde{L}}}(\underline{a})+H_{\underline{\tilde{L}}}(\underline{l}').$$

On a aussi $w^{-1}H_{\underline{\tilde{L}}}(\underline{l})=H_{\tilde{L}}(l)$ etc... D'où

$$w^{-1}H_{\underline{\tilde{L}}}(m)=-H_{\tilde{L}}(l)+H_{\tilde{L}}(a)+H_{\tilde{L}}(l').$$

Il résulte des définitions que $H_{\tilde{L}}(l)=H_{\tilde{Q}}(x)$ et $H_{\tilde{L}}(l')=H_{\tilde{\bar{Q}}}(y)$. On obtient alors l'égalité de (9).

Supposons $\epsilon'$ assez petit pour que (9) soit vérifiée. Alors l'intégrale définissant $u_{\tilde{M}}^T(x,y;\tilde{Q})$ se factorise en

$$(10)\qquad u_{\tilde{M}}^T(x,y;\tilde{Q})=C(\omega)\int_{\mathcal{A}_{A_{\tilde{M}},F}/\mathcal{A}_{A_{\tilde{G}},F}}\phi_{\tilde{Q}}^{\tilde{G}}(H-H_{\tilde{Q}}(x)+H_{\tilde{\bar{Q}}}(y)-T[\tilde{Q}])$$

$$\Gamma_{\tilde{M}}^{\tilde{Q}}(H,\epsilon'\mathcal{T})\tau_{\tilde{Q}}^{\tilde{G}}(H-\epsilon'T[\tilde{Q}])\,dH,$$

où

$$C(\omega)=\int_{A_{\tilde{M}}(F)_cA_{\tilde{G}}(F)/A_{\tilde{G}}(F)}\omega(a)\,da.$$

Si $\omega$ n'est pas trivial sur $A_{\tilde{M}}(F)_c$, $C(\omega)$ est nul. Alors $u_{\tilde{M}}^T(x,y;\tilde{Q})=v_{\tilde{M}}^T(x,y;\tilde{Q})$ par définition de ce dernier terme. Supposons maintenant $\omega$ trivial sur $A_{\tilde{M}}(F)_c$. Alors $C(\omega)=C$. Fixons $H\in\mathcal{A}_{A_{\tilde{M}},F}$ tel que

$$(11)\qquad \Gamma_{\tilde{M}}^{\tilde{Q}}(H,\epsilon'\mathcal{T})\tau_{\tilde{Q}}^{\tilde{G}}(H-\epsilon'T[\tilde{Q}])=1.$$

On va prouver

(12) si $\epsilon'$ et $\epsilon<\epsilon'$ sont assez petits, on a l'égalité

$$\Gamma_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(H,\mathcal{Y}(x,y,T))=\phi_{\tilde{Q}}^{\tilde{G}}(H-H_{\tilde{Q}}(x)+H_{\bar{\tilde{Q}}}(y)-T[\tilde{Q}]).$$

Fixons un sous-espace parabolique $\tilde{P}\in\mathcal{P}(\tilde{M})$ tel que $\tilde{P}\subset\tilde{Q}$ et que $H$ appartienne à la clôture de la chambre positive associée à l'espace parabolique $\tilde{P}\cap\tilde{L}$ de $\tilde{L}$. On a alors l'égalité $\Gamma_{\tilde{M}}^{\tilde{Q}}(H,\epsilon'\mathcal{T})=\phi_{\tilde{P}}^{\tilde{Q}}(H-\epsilon'T[\tilde{P}])$. L'égalité (11) entraîne alors que $H$ appartient à la clôture de la chambre positive associée à l'espace parabolique $\tilde{P}$. Par des arguments déjà vus, on a des majorations

$$|H_{\tilde{P}'}(x)|,|H_{\tilde{P}'}(y)|\leq c_{14}\epsilon'|T|$$

pour tout $\tilde{P}'\in\mathcal{P}(\tilde{M})$. Si $\epsilon'$ est assez petit, il en résulte que $\mathcal{Y}(x,y,T)$ est une famille positive. Donc $H'\mapsto\Gamma_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(H',\mathcal{Y}(x,y,T))$ est la fonction caractéristique de l'ensemble des $H'$ tels que $(H')^{\tilde{G}}$ appartient à l'enveloppe convexe des $Y(x,y,T,\tilde{P}')^{\tilde{G}}$. Pour $H$ dans la clôture de la chambre positive associée à $\tilde{P}$, on a simplement

$$\Gamma_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(H,\mathcal{Y}(x,y,T))=\phi_{\tilde{P}}^{\tilde{G}}(H-H_{\tilde{P}}(x)+H_{\bar{\tilde{P}}}(y)-T[\tilde{P}]).$$

Posons $X=H-H_{\tilde{P}}(x)+H_{\bar{\tilde{P}}}(y)$. De la même façon que l'on a prouvé (5) et (6), on montre que si $\epsilon<\epsilon'$, on a $|X^{\tilde{L}}|\leq c_{15}\epsilon'|T|$, puis que, si $\epsilon'$ est assez petit, on a l'égalité

$$\phi_{\tilde{P}}^{\tilde{G}}(H-H_{\tilde{P}}(x)+H_{\bar{\tilde{P}}}(y)-T[\tilde{P}])=\phi_{\tilde{Q}}^{\tilde{G}}(H-H_{\tilde{Q}}(x)+H_{\bar{\tilde{Q}}}(y)-T[\tilde{Q}]).$$

Cela prouve (12).

L'égalité (10) jointe à (12) prouve l'égalité $u_{\tilde{M}}^T(x,y;\tilde{Q})=v_{\tilde{M}}^T(x,y;\tilde{Q})$. On a dû supposer $\epsilon'$ et $\epsilon/\epsilon'$ assez petits. Si $\epsilon$ lui-même est assez petit, on peut choisir le paramètre auxiliaire $\epsilon'$ satisfaisant ces conditions. Cela prouve le lemme. Cela prouve même plus, à savoir l'égalité $u_{\tilde{M}}^T(x,y;\tilde{Q})=v_{\tilde{M}}^T(x,y;\tilde{Q})$.

Rappelons que l'on avait supposé $F$ non archimédien. Remarquons que cette hypothèse n'a été utilisée que pour affirmer que $exp(X)$ et $exp(Y)$ appartenaient à $K$. Tout le reste est valable sans hypothèse sur $F$. Ainsi, supposons maintenant $F$ archimédien et définissons $\mathbf{u}_{\tilde{M}}^T(x,y,\tilde{Q})$ comme l'intégrale analogue à $u_{\tilde{M}}^T(x,y;\tilde{Q})$ où l'on remplace $\tilde{\kappa}^T(x^{-1}ay)$ par $\tilde{\kappa}^T(l^{-1}al')$. On a pour cette intégrale les mêmes résultats démontrés précédemment pour $u_{\tilde{M}}^T(x,y;\tilde{Q})$. Revenons à l'égalité $x^{-1}ay=k^{-1}exp(X)l^{-1}al'exp(Y)k'$, qui entraîne $\tilde{\kappa}^T(x^{-1}ay)=\tilde{\kappa}^T(exp(X)l^{-1}al'exp(Y))$. Fixons un élément $m'\in M_0(F)^{\geq}$ tel que $exp(X)l^{-1}al'exp(Y)\in Km'K$ et définissons $m$ comme dans le cas non archimédien.

On a encore (4) : $m \in M_0(F)^{\geq}$ (sous hypothèses sur $\epsilon$ et $\epsilon'$). Il résulte alors de (3)(a) et (3)(b) et du lemme 5.2 de [A1] que l'on a une majoration

$$|H_0(m) - H_0(m')| \leq c_{15} exp^{-c_{16}|T|}.$$

Posons $\eta_+ = 1 + exp^{-c_{16}|T|/2}$, $\eta_- = 1 - exp^{-c_{16}|T|/2}$. De l'inégalité ci-dessus résulte les majorations

$$\tilde{\kappa}^{\eta_- T}(m) \leq \left\{ \begin{array}{c} \tilde{\kappa}^T(m) \\ \tilde{\kappa}^T(m') \end{array} \right\} \leq \tilde{\kappa}^{\eta_+ T}(m),$$

puis

$$|\tilde{\kappa}^T(m) - \tilde{\kappa}^T(m')| \leq \tilde{\kappa}^{\eta_+ T}(m) - \tilde{\kappa}^{\eta_- T}(m).$$

Puisque $\tilde{\kappa}^T(m') = \tilde{\kappa}^T(x^{-1}ay)$, on en déduit

$$|\mathbf{u}^T_{\tilde{M}}(x, y; \tilde{Q}) - u^T_{\tilde{M}}(x, y; \tilde{Q})| \leq \int_{A_{\tilde{M}}(F)/A_{\tilde{G},F}} (\tilde{\kappa}^{\eta_+ T}(l^{-1}al') - \tilde{\kappa}^{\eta_- T}(l^{-1}al'))$$

$$\Gamma^{\tilde{Q}}_{\tilde{M}}(H_{\tilde{M}}(a), \epsilon'\mathcal{T})\tau^{\tilde{G}}_{\tilde{Q}}(H_{\tilde{L}}(a) - \epsilon' T[\tilde{Q}]\, da.$$

Le membre de droite est la différence entre une expression analogue à $\mathbf{u}^T_{\tilde{M}}(x, y; \tilde{Q})$ où l'on remplace $\omega$ par 1, $T$ par $\eta_+ T$ et $\epsilon'$ par $\eta_+^{-1}\epsilon'$, et l'expression similaire où $\eta_-$ remplace $\eta_+$. Ces expressions sont calculées par (10). On obtient

$$|\mathbf{u}^T_{\tilde{M}}(x, y; \tilde{Q}) - u^T_{\tilde{M}}(x, y; \tilde{Q})| \leq$$

$$\int_{\mathcal{A}_{A_{\tilde{M}},F}/\mathcal{A}_{A_{\tilde{G}},F}} (\phi^{\tilde{G}}_{\tilde{Q}}(H - H_{\tilde{Q}}(x) + H_{\bar{\tilde{Q}}}(y) - \eta_+ T[\tilde{Q}]) - \phi^{\tilde{G}}_{\tilde{Q}}(H - H_{\tilde{Q}}(x) + H_{\bar{\tilde{Q}}}(y) - \eta_- T[\tilde{Q}]))$$

$$\Gamma^{\tilde{Q}}_{\tilde{M}}(H, \epsilon'\mathcal{T})\tau^{\tilde{G}}_{\tilde{Q}}(H - \epsilon' T[\tilde{Q}])\, dH.$$

Le membre de droite est la différence entre les volumes de deux polyèdres dont l'un est inclus dans l'autre. Leurs sommets ont une norme essentiellement bornée par $|T|$ et tout point de la frontière du petit polyèdre est à distance au plus $c_{17}(\eta_+ - \eta_-)|T|$ de la frontière du plus grand. La différence de leur volume est donc essentiellement bornée par $(\eta_+ - \eta_-)|T|^D$ pour un entier $D$ convenable. Donc par $e^{-c_{16}|T|/2}|T|^D$. On conclut que, pour tout réel $r$,

$$|\mathbf{u}^T_{\tilde{M}}(x, y; \tilde{Q}) - u^T_{\tilde{M}}(x, y; \tilde{Q})| << |T|^{-r}.$$

Comme on l'a dit, la preuve du cas non-archimédien montre que $\mathbf{u}^T_{\tilde{M}}(x, y; \tilde{Q}) = v^T_{\tilde{M}}(x, y; \tilde{Q})$. Cela prouve le lemme. $\square$

## 4.6 Preuve de la proposition 4.3

Pour prouver que $J^T_{v,\tilde{M},\tilde{S}}(\omega, f_1, f_2)$ est absolument intégrable, on considère $T$ comme fixé. L'expression $J^T_{v,\tilde{M},\tilde{S}}(\omega, f_1, f_2)$ est une intégrale en $\gamma$. Elle est à support compact. Au voisinage des éléments singuliers, elle est absolument intégrable d'après le lemme 4.4. En utilisant la relation 4.3(3), on vérifie que la fonction $v^T_{\tilde{M}}(x, y)$ reste bornée (pour $T$ fixé) si $\gamma$ reste hors d'un voisinage des éléments singuliers. Alors l'intégrale hors d'un tel voisinage est essentiellement bornée par

$$(1) \qquad \int_{\tilde{S}(F)/(1-\theta)(S(F))} \int_{S^\theta(F)\backslash G(F)} \int_{A_{\tilde{M}}(F)\backslash G(F)} |f_1(x^{-1}\gamma x) f_2(y^{-1}\gamma y)|\, dy\, dx\, D^{\tilde{G}}(\gamma)\, d\gamma,$$

ou encore par

$$\int_{\tilde{S}(F)/(1-\theta)(S(F))} I_{\tilde{G}}(\gamma, |f_1|) I_{\tilde{G}}(\gamma, |f_2|) d\gamma,$$

qui est convergente d'après 4.2(1).

Démontrons maintenant la majoration de l'énoncé de la proposition 4.3. On fixe $\epsilon$ comme dans le lemme 4.5. On fixe ensuite $\epsilon' > 0$ tel que la relation $D^{\tilde{G}}(\gamma) \geq e^{-\epsilon'|T|}$ et la relation 4.3(3) :

$$||x||, ||y|| \leq cD^{\tilde{G}}(\gamma)^{-k}$$

entraînent $||x||, ||y|| \leq e^{\epsilon|T|}$, du moins si $T$ est grand (on peut supposer $T$ grand pour démontrer notre majoration). On décompose $J^T_{\tilde{M},\tilde{S}}(\omega, f_1, f_2) - J^T_{v,\tilde{M},\tilde{S}}(\omega, f_1, f_2)$ en somme de deux intégrales. Dans la première, on glisse le terme $\chi^T_{\epsilon'}(\gamma)$. Dans la seconde, on glisse le terme $1 - \chi^T_{\epsilon'}(\gamma)$. La première intégrale est majorée par le lemme 4.4 : pour tout réel $r$, elle est essentiellement bornée par $|T|^{-r}$. Dans la seconde, grâce à 4.3(3) et nos choix de $\epsilon'$ et $\epsilon$, on a la majoration du lemme 4.5. Pour tout $r$, cette intégrale est donc essentiellement majorée par le produit de $|T|^{-r}$ et de l'intégrale (1). Celle-ci étant convergente, cela prouve la majoration cherchée. □

## 4.7 Terme constant de $v^T_{\tilde{M}}(x, y)$

Soient $x, y \in G(F)$. Pour $\tilde{P} \in \mathcal{P}(\tilde{M})$ et $\Lambda \in i\mathcal{A}^*_{\tilde{M}}$, posons

$$v(x, y; \Lambda, \tilde{P}) = e^{<\Lambda, H_{\tilde{P}}(y) - H_{\tilde{P}}(x)>}.$$

La famille $(v(x, y; \Lambda, \tilde{P}))_{\tilde{P}\in\mathcal{P}(\tilde{M})}$ est une $(\tilde{G}, \tilde{M})$-famille, dont on déduit une fonction $v^{\tilde{G}}_{\tilde{M}}(x, y; \Lambda)$. On pose $v^{\tilde{G}}_{\tilde{M}}(x, y) = v^{\tilde{G}}_{\tilde{M}}(x, y; 0)$.

**Lemme**. *(i) La fonction $T \mapsto f(T) = v^T_{\tilde{M}}(x, y)$ appartient à PolExp. Plus précisément, elle appartient à un espace $PolExp_{\Xi,N}$ si $F$ est archimédien, resp. $PolExp_{\boldsymbol{\Xi},N}$ si $F$ est non-archimédien, où $\Xi$ et $N$, resp. $\boldsymbol{\Xi}$ et $N$, sont indépendants de $x$ et $y$.*

*(ii) Supposons $F$ archimédien. On a*

$$c_0(f) = \begin{cases} (-1)^{a_{\tilde{M}} - a_{\tilde{G}}} v^{\tilde{G}}_{\tilde{M}}(x, y), & \text{si } \omega \text{ est trivial sur } A_{\tilde{M}}(F), \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

*(iii) Supposons $F$ non-archimédien. Soit $\mathcal{R} \subset \mathcal{A}_{M_0,F} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ un réseau. Alors il existe un entier $k_1 > 0$ et un réel $c > 0$ ne dépendant tous deux que de $\mathcal{R}$ de sorte que, pour tout entier $k \geq 1$, on ait la majoration*

$$|c_{\frac{1}{k}\mathcal{R},0}(f)| \leq ck^{-1}(log(||x||) + log(||y||))^{a_{\tilde{M}} - a_{\tilde{G}}}$$

*si $\omega$ est non trivial sur $A_{\tilde{M}}(F)$, respectivement*

$$|c_{\frac{1}{k}\mathcal{R},0}(f) - (-1)^{a_{\tilde{M}} - a_{\tilde{G}}} v^{\tilde{G}}_{\tilde{M}}(x, y)| \leq ck^{-1}(log(||x||) + log(||y||))^{a_{\tilde{M}} - a_{\tilde{G}}}$$

*si $\omega$ est trivial sur $A_{\tilde{M}}(F)$.*

Preuve. On traite le cas où $F$ est non-archimédien, le cas archimédien étant plus simple. Si $\omega$ n'est pas trivial sur $A_{\tilde{M}}(F)_c$, $v^T_{\tilde{M}}(x,y)=0$ et les assertions sont évidentes. Supposons $\omega$ trivial sur $A_{\tilde{M}}(F)_c$. On a déduit de $\omega$ un caractère de $\mathcal{A}_{A_{\tilde{M}},F}$, encore noté $\omega$. Il y a un unique $\Lambda_\omega\in i\mathcal{A}^*_{\tilde{M}}/\mathcal{A}^\vee_{A_{\tilde{M}},F}$ tel que $\omega(H)=e^{<\Lambda_\omega,H>}$ pour tout $H\in\mathcal{A}_{A_{\tilde{M}},F}$. Notons que, puisque $\omega$ est trivial sur $A_{\tilde{G}}(F)$, la projection $(\Lambda_\omega)_{\tilde{G}}$ appartient à $i\mathcal{A}^*_{A_{\tilde{G}},F}$. On a

$$v^T_{\tilde{M}}(x,y)=C\sum_{\mathcal{A}_{A_{\tilde{M}},F}/\mathcal{A}_{A_{\tilde{G}},F}}\Gamma^{\tilde{G}}_{\tilde{M}}(H,\mathcal{Y}(x,y,T))e^{<\Lambda_\omega,H>}.$$

On peut décomposer la somme en une somme sur $X\in\mathcal{A}_{\tilde{G},F}/\mathcal{A}_{A_{\tilde{G}},F}$ suivie d'une somme sur $H\in\mathcal{A}_{A_{\tilde{M}},F}\cap\mathcal{A}^{\tilde{G}}_{\tilde{M},F}(X)$. Par inversion de Fourier, cette dernière somme peut être remplacée par la somme sur $H\in\mathcal{A}^{\tilde{G}}_{\tilde{M},F}(X)$, suivie de

$$[\mathcal{A}_{\tilde{M},F}:\mathcal{A}_{A_{\tilde{M}},F}]^{-1}\sum_{\nu\in i\mathcal{A}^\vee_{A_{\tilde{M}},F}/i\mathcal{A}^\vee_{\tilde{M},F}}e^{<\nu,H>}.$$

Remarquons que $C[\mathcal{A}_{\tilde{M},F}:\mathcal{A}_{A_{\tilde{M}},F}]^{-1}=mes(A_{\tilde{G}}(F)_c)^{-1}mes(i\mathcal{A}^*_{\tilde{M},F})^{-1}$. Tout ceci est absolument convergent puisque la fonction $H\mapsto\Gamma^{\tilde{G}}_{\tilde{M}}(H,\mathcal{Y}(x,y,T))$ est à support compact. On obtient

$$v^T_{\tilde{M}}(x,y)=mes(A_{\tilde{G}}(F)_c)^{-1}mes(i\mathcal{A}^*_{\tilde{M},F})^{-1}\sum_{\nu\in i\mathcal{A}^\vee_{A_{\tilde{M}},F}/i\mathcal{A}^\vee_{\tilde{M},F}}\;\sum_{X\in\mathcal{A}_{\tilde{G},F}/\mathcal{A}_{A_{\tilde{G}},F}}I^T(x,y,X;\Lambda_\omega+\nu),$$

où, pour $\Lambda\in\mathcal{A}^*_{\tilde{M},\mathbb{C}}$, on a posé

$$I^T(x,y,X;\Lambda)=\sum_{H\in\mathcal{A}^{\tilde{G}}_{\tilde{M},F}(X)}\Gamma^{\tilde{G}}_{\tilde{M}}(H,\mathcal{Y}(x,y,T))e^{<\Lambda,H>}.$$

Cette dernière somme est finie donc définit une fonction holomorphe en $\Lambda$. Fixons $\tilde{P}_1\in\mathcal{P}(\tilde{M})$ et supposons $<\Lambda,\check{\tilde{\alpha}}>>0$ pour tout $\tilde{\alpha}\in\Delta_{\tilde{P}_1}$. La variante tordue de 1.3(7) nous dit que

$$\Gamma^{\tilde{G}}_{\tilde{M}}(H,\mathcal{Y}(x,y,T))=\sum_{\tilde{P}\in\mathcal{P}(\tilde{M})}(-1)^{s(\tilde{P},\tilde{P}_1)}\phi^{\tilde{G}}_{\tilde{P},\tilde{P}_1}(H-Y(x,y,T;\tilde{P})),$$

où $Y(x,y,T;\tilde{P})=T[\tilde{P}]-H_{\tilde{P}}(x)+H_{\bar{\tilde{P}}}(y)$. L'hypothèse sur $\Lambda$ nous permet de permuter les deux sommes :

$$I^T(x,y,X;\Lambda)=\sum_{\tilde{P}\in\mathcal{P}(\tilde{M})}(-1)^{s(\tilde{P},\tilde{P}_1)}\sum_{H\in\mathcal{A}^{\tilde{G}}_{\tilde{M},F}(X)}\phi^{\tilde{G}}_{\tilde{P},\tilde{P}_1}(H-Y(x,y,T;\tilde{P}))$$

$$=\sum_{\tilde{P}\in\mathcal{P}(\tilde{M})}(-1)^{s(\tilde{P},\tilde{P}_1)}\epsilon^{\tilde{G},Y(x,y,T;\tilde{P})}_{\tilde{P},\tilde{P}_1}(X;\Lambda).$$

La variante tordue de 1.5(2) conduit à l'égalité

$$I^T(x,y,X;\Lambda)=\sum_{\tilde{P}\in\mathcal{P}(\tilde{M})}\epsilon^{\tilde{G},Y(x,y,T;\tilde{P})}_{\tilde{P}}(X;\Lambda).$$

Introduisons la $(\tilde{G},\tilde{M})$-famille $(\varphi(\Lambda;\tilde{P}))_{\tilde{P}\in\mathcal{P}(\tilde{M})}$ formée des fonctions constantes valant 1. Alors

$$I^T(x,y,X;\Lambda)=\varphi_{\tilde{M}}^{\tilde{G},\mathcal{Y}(x,y,T)}(X;\Lambda).$$

On a prouvé cette égalité sous des hypothèses portant sur $\Lambda$ mais elle se prolonge à tout $\Lambda$, les deux membres étant méromorphes (et en fait holomorphes). Notons simplement $\mathcal{Y}_{x,y}=\mathcal{Y}(x,y,0)$. Avec la définition de 1.7 (dans sa version tordue), on a $\mathcal{Y}(x,y,T)=\mathcal{Y}_{x,y}(T)$. On obtient

$$v_{\tilde{M}}^T(x,y)=mes(A_{\tilde{G}}(F)_c)^{-1}mes(i\mathcal{A}_{\tilde{M},F}^*)^{-1}\sum_{\nu\in i\mathcal{A}_{A_{\tilde{M}},F}^\vee/i\mathcal{A}_{\tilde{M},F}^\vee}\sum_{X\in\mathcal{A}_{\tilde{G},F}/\mathcal{A}_{A_{\tilde{G}},F}}\varphi_{\tilde{M}}^{\tilde{G},\mathcal{Y}_{x,y}(T)}(X;\Lambda_\omega+\nu).$$

La variante tordue du lemme 1.7 entraîne l'assertion (i) de l'énoncé. Pour un réseau $\mathcal{R}$ et un entier $k$, le coefficient $c_{\frac{1}{k}\mathcal{R},0}(f)$ est le produit de $mes(A_{\tilde{G}}(F)_c)^{-1}mes(i\mathcal{A}_{\tilde{M},F}^*)^{-1}$ et de la somme des coefficients analogues pour les fonctions $T\mapsto\varphi_{\tilde{M}}^{\tilde{G},\mathcal{Y}_{x,y}(T)}(X;\Lambda_\omega+\nu)$, lesquels sont calculés par le même lemme. Notons $\mathcal{N}$ l'ensemble des $\nu\in i\mathcal{A}_{A_{\tilde{M}},F}^\vee/i\mathcal{A}_{\tilde{M},F}^\vee$ tel que $\Lambda_\omega+\nu\in i\mathcal{A}_{\tilde{M},F}^\vee+i\mathcal{A}_{\tilde{G}}^*$. Pour $\nu\in\mathcal{N}$, fixons $\Lambda_{\omega,\nu}\in i\mathcal{A}_{\tilde{G}}^*$ tel que $\Lambda_\omega+\nu\in\Lambda_{\omega,\nu}+i\mathcal{A}_{\tilde{M},F}^\vee$. Posons

$$(1)\qquad c(f)=mes(A_{\tilde{G}}(F)_c)^{-1}mes(i\mathcal{A}_{\tilde{G},F}^*)^{-1}\sum_{\nu\in\mathcal{N}}\sum_{X\in\mathcal{A}_{\tilde{G},F}/\mathcal{A}_{A_{\tilde{G}},F}}e^{<\Lambda_{\omega,\nu},X>}\varphi_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(\mathcal{Y}_{x,y};\Lambda_{\omega,\nu}).$$

Notons $N(x,y)$ la norme de la $(\tilde{G},\tilde{M})$-famille $(\varphi(\mathcal{Y}_{x,y};\Lambda,\tilde{P}))_{\tilde{P}\in\mathcal{P}(\tilde{M})}$. La variante du lemme 1.7 implique qu'il existe un entier $k_1>0$ et un réel $c>0$, ne dépendant tous deux que de $\mathcal{R}$, de sorte que, si $k\geq k_1$, on ait la majoration

$$(2)\qquad |c_{\frac{1}{k}\mathcal{R},0}(f)-c(f)|\leq cN(x,y)k^{-1}.$$

En comparant les définitions, on voit que $\varphi(\mathcal{Y}_{x,y};\Lambda,\tilde{P})=v(x,y;-\Lambda,\tilde{P})$ pour tout $\tilde{P}$. Parce que $\epsilon_{\tilde{P}}^{\tilde{G}}(-\Lambda)=(-1)^{a_{\tilde{M}}-a_{\tilde{G}}}\epsilon_{\tilde{P}}^{\tilde{G}}(\Lambda)$, on en déduit

$$\varphi_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(\mathcal{Y}_{x,y};\Lambda_{\omega,\nu})=(-1)^{a_{\tilde{M}}-a_{\tilde{G}}}v_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(x,y;-\Lambda_{\omega,\nu}).$$

Dans la formule (1), la somme en $X$ vaut $[\mathcal{A}_{\tilde{G},F}:\mathcal{A}_{A_{\tilde{G}},F}]$ si $\Lambda_{\omega,\nu}\in i\mathcal{A}_{\tilde{G},F}^\vee$, 0 sinon. Notons que si $\Lambda_{\omega,\nu}\in i\mathcal{A}_{\tilde{G},F}^\vee$, on a $\Lambda_\omega+\nu\in i\mathcal{A}_{\tilde{M},F}^\vee$, d'où $\Lambda_\omega\in i\mathcal{A}_{A_{\tilde{M}},F}^\vee$. Cela équivaut à ce que $\omega$ soit trivial sur $A_{\tilde{M}}(F)$. Donc, si $\omega$ n'est pas trivial sur $A_{\tilde{M}}(F)$, $c(f)=0$. Supposons $\omega$ trivial sur $A_{\tilde{M}}(F)$. On peut supposer $\Lambda_\omega=0$. La condition $\nu\in\mathcal{N}$ signifie que $\nu\in(i\mathcal{A}_{A_{\tilde{M}},F}^\vee\cap i\mathcal{A}_{\tilde{G}}^*)/i\mathcal{A}_{\tilde{G},F}^\vee$. La condition $\Lambda_{\omega,\nu}\in i\mathcal{A}_{\tilde{G},F}^\vee$ sélectionne le terme $\nu=0$. En remarquant que $mes(A_{\tilde{G}}(F)_c)^{-1}mes(i\mathcal{A}_{\tilde{G},F}^*)^{-1}[\mathcal{A}_{\tilde{G},F}:\mathcal{A}_{A_{\tilde{G}},F}]=1$, on obtient

$$c(f)=(-1)^{a_{\tilde{M}}-a_{\tilde{G}}}v_{\tilde{M}}(x,y).$$

La majoration

$$N(x,y)<<sup_{\tilde{P}\in\mathcal{P}(\tilde{M})}(1+|H_{\tilde{P}}(x)|+|H_{\bar{\tilde{P}}}(y)|)^{a_{\tilde{M}}-a_{\tilde{G}}}$$

résulte des définitions. Il est clair que l'on a

$$(3)\qquad 1+|H_{\tilde{P}}(x)|+|H_{\bar{\tilde{P}}}(y)|<<1+log(||x||)+log(||y||).$$

Alors les assertions de l'énoncé résultent de (2). $\square$

## 4.8 Terme constant de $J^T_{v,\tilde{M},\tilde{S}}(\omega, f_1, f_2)$

Supposons d'abord $\omega$ trivial sur $S^\theta(F)$. Pour $\gamma \in \tilde{S}(F)$, posons

$$J^{\tilde{G}}_{\tilde{M}}(\gamma, \omega, f_1, f_2) = D^{\tilde{G}}(\gamma) \int_{S^\theta(F)\backslash G(F)} \int_{S^\theta(F)\backslash G(F)} \bar{f}_1(x^{-1}\gamma x) f_2(y^{-1}\gamma y)\omega(x^{-1}y) v^{\tilde{G}}_{\tilde{M}}(x,y)\, dy\, dx.$$

Posons

$$J^{\tilde{G}}_{\tilde{M},\tilde{S}}(\omega, f_1, f_2) = |W^M(\tilde{S})|^{-1} mes(A_{\tilde{M}}(F)\backslash S^\theta(F)) \int_{\tilde{S}(F)/(1-\theta)(S(F))} J^{\tilde{G}}_{\tilde{M}}(\gamma, \omega, f_1, f_2)\, d\gamma.$$

Si $\omega$ n'est pas trivial sur $S^\theta(F)$, on pose simplement

$$J^{\tilde{G}}_{\tilde{M},\tilde{S}}(\omega, f_1, f_2) = 0.$$

**Lemme**. *(i) Les expressions ci-dessus sont absolument convergentes.*

*(ii) La fonction $T \mapsto f(T) = J^T_{v,\tilde{M},\tilde{S}}(\omega, f_1, f_2)$ appartient à $PolExp$. Si $F$ est archimédien, on a l'égalité $c_0(f) = (-1)^{a_{\tilde{M}}-a_{\tilde{G}}} J^{\tilde{G}}_{\tilde{M},\tilde{S}}(\omega, f_1, f_2)$. Si $F$ est non-archimédien, pour tout réseau $\mathcal{R} \subset \mathcal{A}_{M_0,F} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$, on a l'égalité*

$$lim_{k\to\infty} c_{\frac{1}{k}\mathcal{R},0}(f) = (-1)^{a_{\tilde{M}}-a_{\tilde{G}}} J^{\tilde{G}}_{\tilde{M},\tilde{S}}(\omega, f_1, f_2).$$

**Remarque.** Comme en 3.23, on appellera "terme constant" de $f$ le terme $c_0(f)$ si $F$ est archimédien, $lim_{k\to\infty} c_{\frac{1}{k}\mathcal{R},0}(f)$ si $F$ est non-archimédien.

Preuve. Pour l'assertion (i), on peut supposer $\omega$ trivial sur $S^\theta(F)$. Il résulte de la variante tordue de 1.7(1) et de 4.7(3) que l'on a une majoration

$$|v_{\tilde{M}}(x,y)| << (1 + log(||x||) + log(||y||))^D$$

pour tous $x, y \in G(F)$, où $D = a_{\tilde{M}} - a_{\tilde{G}}$. En tenant compte de 4.3(3), il suffit de prouver la convergence de

$$(1) \qquad \int_{S^\theta(F)\backslash G(F)} \int_{A_{\tilde{M}}(F)\backslash G(F)} |f_1(x^{-1}\gamma x) f_2(y^{-1}\gamma y)|(1 + |log(D^{\tilde{G}}(\gamma))|)^D\, dy\, dx\, D^{\tilde{G}}(\gamma)\, d\gamma.$$

Grâce à 4.2(1), on est ramené à celle de l'intégrale

$$\int_\Omega (1 + |log(D^{\tilde{G}}(\gamma))|)^D\, d\gamma.$$

Puisqu'on a sur $\Omega$ une majoration $(1 + |log(D^{\tilde{G}}(\gamma))|)^D << D^{\tilde{G}}(\gamma)^{-\eta}$, cela résulte de 4.2(2).

Prouvons (ii), en supposant comme souvent $F$ non-archimédien. Le lemme précédent nous dit que chaque fonction $T \mapsto v^T_{\tilde{M}}(x,y)$ appartient à $PolExp$. Plus précisément, pour tout réseau $\mathcal{R} \subset \mathcal{A}_{M_0,F} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$, on peut écrire

$$v^T_{\tilde{M}}(x,y) = \sum_{\mu \in \chi_{\mathcal{R}}} e^{<\mu,T>} p_{\mathcal{R},\mu,x,y}(T),$$

où $\chi_{\mathcal{R}}$ est indépendant de $x$ et $y$ et les polynômes $p_{\mathcal{R},\mu,x,y}$ ont un degré borné indépendamment de $x$ et $y$. Comme en 3.23, les coefficients de ces polynômes se calculent par interpolation, donc ont les mêmes propriétés de croissance que les fonctions $v^T_{\tilde{M}}(x,y)$ elles-mêmes. Il en résulte que, dans la formule intégrale définissant $J^T_{v,\tilde{M},\tilde{S}}(\omega,f_1,f_2)$, les intégrales commutent au développement en $T$. Cela entraîne que la fonction $T\mapsto f(T)=J^T_{v,\tilde{M},\tilde{S}}(\omega,f_1,f_2)$ appartient à $PolExp$. Cela entraîne aussi que le terme $c_{\frac{1}{k}\mathcal{R},0}(f)$ se calcule en remplaçant dans l'intégrale les fonctions $v^T_{\tilde{M}}(x,y)$ par leurs termes similaires. Ceux-ci sont calculés par le lemme 4.7, à une erreur près. L'intégrale des termes d'erreurs est essentiellement majorée par le produit de $k^{-1}$ et de l'intégrale (1) ci-dessus. Puisque celle-ci est convergente, ce terme d'erreur tend vers 0 quand $k$ tend vers l'infini. Le terme principal est nul si $\omega$ n'est pas trivial sur $A_{\tilde{M}}(F)$ et on obtient dans ce cas la formule cherchée. Supposons $\omega$ trivial sur $A_{\tilde{M}}(F)$. On obtient dans ce cas pour terme constant

$$(2)\qquad (-1)^{a_{\tilde{M}}-a_{\tilde{G}}}|W^M(\tilde{S})|^{-1}\int_{\tilde{S}(F)/(1-\theta)(S(F))}$$

$$\int_{S^\theta(F)\backslash G(F)}\int_{A_{\tilde{M}}(F)\backslash G(F)}\bar{f}_1(x^{-1}\gamma x)f_2(y^{-1}\gamma y)\omega(x^{-1}y)v^{\tilde{G}}_{\tilde{M}}(x,y)\,dy\,dx\,D^{\tilde{G}}(\gamma)\,d\gamma.$$

On remarque que la fonction $y\mapsto v_{\tilde{M}}(x,y)$ est invariante à gauche par $M(F)$, donc par $S(F)$. En factorisant l'intégrale en $y$ en une intégrale sur $S^\theta(F)\backslash G(F)$ et une intégrale en $A_{\tilde{M}}(F)\backslash S^\theta(F)$, on voit apparaître l'intégrale

$$\int_{A_{\tilde{M}}(F)\backslash S^\theta(F)}\omega(y)\,dy.$$

Elle est nulle (et donc aussi le terme constant), si $\omega$ n'est pas trivial sur $S^\theta(F)$. Si $\omega$ est trivial sur $S^\theta(F)$, elle vaut $mes(A_{\tilde{M}}(F)\backslash S^\theta(F))$. La formule (2) devient $(-1)^{a_{\tilde{M}}-a_{\tilde{G}}}J^{\tilde{G}}_{\tilde{M},\tilde{S}}(\omega,f_1,f_2)$.
$\square$

## 4.9 La formule géométrique

Pour tout $\tilde{M}\in\mathcal{L}(\tilde{M}_0)$, on note $T_{ell}(\tilde{M},\omega)$ l'ensemble des $\tilde{S}\in T_{ell}(\tilde{M})$ tels que $\omega$ soit trivial sur $S^\theta(F)$. On pose

$$J^{\tilde{G}}_{g\acute{e}om,\tilde{M}}(\omega,f_1,f_2)=\sum_{\tilde{S}\in T_{ell}(\tilde{M},\omega)}|W^M(\tilde{S})|^{-1}mes(A_{\tilde{M}}(F)\backslash S^\theta(F))$$

$$\int_{\tilde{S}(F)/(1-\theta)(S(F))}J^{\tilde{G}}_{\tilde{M}}(\gamma,\omega,f_1,f_2)\,d\gamma.$$

On pose

$$J^{\tilde{G}}_{g\acute{e}om}(\omega,f_1,f_2)=\sum_{\tilde{M}\in\mathcal{L}(\tilde{M}_0)}|\tilde{W}^M||\tilde{W}^G|^{-1}(-1)^{a_{\tilde{M}}-a_{\tilde{G}}}J^{\tilde{G}}_{g\acute{e}om,\tilde{M}}(\omega,f_1,f_2).$$

**Proposition**. *Il existe une unique fonction $T\mapsto\varphi(T)$ qui appartient à $PolExp$ et qui vérifie pour tout réel $r$ la majoration*

$$|J^T(\omega,f_1,f_2)-\varphi(T)|<<|T|^{-r}$$

*pour tout $T$ dans le cône où $J^T(\omega, f_1, f_2)$ est définie. Si $F$ est archimédien, on a l'égalité*

$$c_0(\varphi) = J^{\tilde{G}}_{g\acute{e}om}(\omega, f_1, f_2).$$

*Si $F$ est non-archimédien, pour tout réseau $\mathcal{R} \subset \mathcal{A}_{M_0,F} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$, on a l'égalité*

$$lim_{k\to\infty} c_{\frac{1}{k}\mathcal{R},0}(\varphi) = J^{\tilde{G}}_{g\acute{e}om}(\omega, f_1, f_2).$$

Preuve. Cela résulte de 4.3(1) et du lemme précédent. □

# 5 La formule des traces locale tordue, version non invariante

## 5.1 Le théorème

On a défini des expressions $J^{\tilde{G}}_{spec}(\omega, f_1, f_2)$ et $J^{\tilde{G}}_{g\acute{e}om}(\omega, f_1, f_2)$ en 3.26 et 4.9.

**Théorème**. *On a l'égalité $J^{\tilde{G}}_{spec}(\omega, f_1, f_2) = J^{\tilde{G}}_{g\acute{e}om}(\omega, f_1, f_2)$.*

Il suffit de comparer les propositions 3.26 et 4.9. □

**Remarque.** Nos mesures vérifiant les conditions de cohérence de 1.2, on voit que les expressions du théorème sont proportionnelles au carré de la mesure sur $G(F)$, en un sens évident, et inversement proportionnelles à la mesure sur $A_{\tilde{G}}(F)$. Elles ne dépendent d'aucune autre mesure.

## 5.2 Extension de la formule des traces locale tordue aux fonctions $C^\infty$ à support compact

Dans ce paragraphe, $F$ est archimédien. Notons $\mathfrak{U}$ l'algèbre enveloppante de l'algèbre de Lie réelle de $G(F)$. Elle agit à droite et à gauche sur les fonctions $C^\infty$ sur $\tilde{G}(F)$. Pour $X, Y \in \mathfrak{U}$ et $f$ une telle fonction, on note $XfY$ l'image de $f$ par les actions à gauche de $X$ et à droite de $Y$. Soit $\Omega$ un sous-ensemble compact de $\tilde{G}(F)$. Notons $C^\infty_c(\Omega)$ l'espace des éléments de $C^\infty_c(\tilde{G}(F))$ à support dans $\Omega$. On munit $C^\infty_c(\Omega)$ de la topologie définie par les semi-normes

$$f \mapsto sup_{\gamma\in\Omega}|XfY(\gamma)|,$$

pour $X, Y \in \mathfrak{U}$. On a l'égalité

$$C^\infty_c(\tilde{G}(F)) = \bigcup_{\Omega} C^\infty_c(\Omega)$$

où $\Omega$ décrit les sous-ensembles compacts de $\tilde{G}(F)$. On munit $C^\infty_c(\tilde{G}(F))$ de la topologie limite inductive des topologies que l'on vient de définir sur les sous-espaces $C^\infty_c(\Omega)$. Autrement dit, une suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $C^\infty_c(\tilde{G}(F))$ converge vers $f \in C^\infty_c(\tilde{G}(F))$ si et seulement si les deux conditions suivantes sont satisfaites :

- il existe un sous-ensemble compact $\Omega \subset \tilde{G}(F)$ tel que $f$ et chaque $f_n$ soient à support dans $\Omega$ ;

- pour tous $X, Y \in \mathfrak{U}$, on a $lim_{n\to\infty} sup_{\gamma\in\tilde{G}(F)} |XfY(\gamma) - Xf_nY(\gamma)| = 0$.

Comme dans le cas non tordu, le théorème de Peter-Weyl entraîne que $C_c^\infty(\tilde{G}(F), K)$ est dense dans $C_c^\infty(\tilde{G}(F))$.

**Proposition**. *Soient* $f_1, f_2 \in C_c^\infty(\tilde{G}(F))$.

*(i) Toutes les expressions intervenant dans la définition de* $J_{spec}^{\tilde{G}}(\omega, f_1, f_2)$ *et* $J_{géom}^{\tilde{G}}(\omega, f_1, f_2)$ *sont convergentes et ces expressions elles-mêmes le sont.*

*(ii) On a l'égalité* $J_{spec}^{\tilde{G}}(\omega, f_1, f_2) = J_{géom}^{\tilde{G}}(\omega, f_1, f_2)$.

Preuve. Le côté géométrique est à peu près trivial. Pour $i = 1, 2$, on peut majorer $|f_i|$ par une fonction $f_i' \in C_c^\infty(\tilde{G}(F), K)$ à valeurs positives ou nulles. Chaque terme de $J_{géom}^{\tilde{G}}(\omega, f_1, f_2)$ est majoré par le même terme relatif aux fonctions $f_1'$ et $f_2'$ et au caractère $\omega$ trivial. La convergence de ces termes entraîne celle des termes initiaux. On voit de même que $J_{géom}^{\tilde{G}}(\omega, f_1, f_2)$ est continu en $f_1$ et $f_2$.

Passons aux termes spectraux. Dans le cas où $F = \mathbb{C}$, on voit que notre problème est équivalent à celui concernant les objets déduits de $G$ et $\tilde{G}$ par restriction des scalaires de $\mathbb{C}$ à $\mathbb{R}$. On suppose donc $F = \mathbb{R}$. On peut fixer un sous-ensemble compact $\Omega \subset \tilde{G}(\mathbb{R})$ et supposer nos fonctions $f_1$ et $f_2$ à support dans $\Omega$. On a une formule de la forme

$$(1) \qquad J_{spec}^{\tilde{G}}(\omega, f_1, f_2) = \sum_{\tilde{M}\in\mathcal{L}(\tilde{M}_0)} \sum_{\tau\in(E_{disc}(\tilde{M},\omega)/conj)/i\mathcal{A}_{\tilde{M}}^*} c(\tau) \int_{i\mathcal{A}_{\tilde{M}}^*} J_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(\pi_{\tau_\lambda}, f_1, f_2)\, d\lambda,$$

où les $c(\tau)$ sont des coefficients uniformément bornés. On fixe $\gamma_0 \in \tilde{M}_0(\mathbb{R})$ vérifiant la condition 2.1(4) et on définit des fonctions $\varphi_i$ sur $G(\mathbb{R})$ pour $i = 1, 2$ par $\varphi_i(x) = f_i(x\gamma_0)$. Fixons $\tilde{M}$ et $\tau$ intervenant dans la formule ci-dessus. On a une égalité

$$J_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(\pi_{\tau_\lambda}, f_1, f_2) = trace(\mathcal{X}_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(\pi_{\tau_\lambda})(\overline{\tilde{\Pi}_{\boldsymbol{\tau}_{\tilde{\lambda}}}(f_1)} \otimes \tilde{\Pi}_{\boldsymbol{\tau}_{\tilde{\lambda}}}(f_2))),$$

où $\mathcal{X}_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(\pi_{\tau_\lambda})$ est l'opérateur déduit de la $(\tilde{G}, \tilde{M})$ famille $(\mathcal{X}(\pi_{\tau_\lambda}; \Lambda, \tilde{Q}))_{\tilde{Q}\in\mathcal{P}(\tilde{M})}$ définie par

$$\mathcal{X}(\pi_{\tau_\lambda}; \Lambda, \tilde{Q}) = \overline{\mathcal{M}(\pi_{\tau_\lambda}; \Lambda, \bar{\tilde{Q}})} \otimes \mathcal{M}(\pi_{\tau_\lambda}; \Lambda, \tilde{Q}).$$

On a aussi

$$\overline{\tilde{\Pi}_{\boldsymbol{\tau}_{\tilde{\lambda}}}(f_1)} \otimes \tilde{\Pi}_{\boldsymbol{\tau}_{\tilde{\lambda}}}(f_2) = \left(\overline{\Pi_{\tau_\lambda}(\varphi_1)} \otimes \Pi_{\tau_\lambda}(\varphi_2)\right) U_{\tau_\lambda},$$

où

$$U_{\tau_\lambda} = \overline{\tilde{\Pi}_{\boldsymbol{\tau}_{\tilde{\lambda}}}(\gamma_0)} \otimes \tilde{\Pi}_{\boldsymbol{\tau}_{\tilde{\lambda}}}(\gamma_0).$$

On a donc

$$J_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(\pi_{\tau_\lambda}, f_1, f_2) = trace(j_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(\pi_{\tau_\lambda}, \varphi_1, \varphi_2)),$$

où

$$j_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(\pi_{\tau_\lambda}, \varphi_1, \varphi_2) = \mathcal{X}_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(\pi_{\tau_\lambda}) \left(\overline{\Pi_{\tau_\lambda}(\varphi_1)} \otimes \Pi_{\tau_\lambda}(\varphi_2)\right) U_{\tau_\lambda}.$$

On peut bien sûr fixer $\tilde{M}$ et ne considérer que la sous-somme de l'expression (1) indexée par $\tilde{M}$. Un élément $\tau \in E_{disc}(\tilde{M}, \omega)$ est de la forme $(M_{disc}, \sigma, \tilde{r})$, où $M_{disc} \subset M$ et $\sigma$ est de la série discrète de $M_{disc}(\mathbb{R})$. On peut encore fixer $M_{disc}$, que l'on suppose semi-standard, et ne considérer que la sous-somme des $\tau$ issus de ce Levi. On peut identifier la composante neutre de $A_{M_{disc}}(\mathbb{R})$ à $\mathcal{A}_{M_{disc}}$. Puisque $\tau$ est discret, l'ensemble $W_{reg}^{\tilde{M}}(\sigma)$ n'est pas vide. La restriction du caractère central de $\sigma$ à $\mathcal{A}_{M_{disc}}$ est naturellement paramétrée par un élément de $i\mathcal{A}_{M_{disc}}^*$. Cette restriction étant fixée par tout élément de $W_{reg}^{\tilde{M}}(\sigma)$ et l'ensemble des points fixes de l'action d'un tel élément dans $i\mathcal{A}_{M_{disc}}^*$ étant égal à $i\mathcal{A}_{\tilde{M}}^*$, le paramètre en question appartient à $i\mathcal{A}_{\tilde{M}}^*$. Puisque seule intervient la classe de $\tau$ modulo ce groupe, on peut supposer que la restriction du caractère central de $\sigma$ à $\mathcal{A}_{M_{disc}}$ est triviale. Fixons comme en 1.10 une sous-algèbre de Cartan $\mathfrak{h}_{\mathbb{C}}$ de l'algèbre de Lie complexifiée de $M_{disc}(\mathbb{R})$. Pour toute représentation irréductible $\sigma$ de $M_{disc}(\mathbb{R})$, on choisit un élément $\mu_\sigma \in \mathfrak{h}_{\mathbb{C}}$ dont la classe modulo un certain groupe de Weyl paramètre le caractère infinitésimal de $\sigma$. Notons $\hat{K}$ l'ensemble des représentations irréductibles de $K$. De même, un élément $\kappa \in \hat{K}$ a un paramètre $\mu_\kappa \in \mathfrak{h}_{\mathbb{C}}$. Rappelons que les opérateurs qui interviennent dans l'intégrale de (3) agissent dans la représentation $Ind_S^G(\sigma_\lambda)\otimes Ind_S^G(\sigma_\lambda)$, où $S$ est un élément fixé de $\mathcal{P}(M_{disc})$. On décompose cette représentation selon les espaces isotypiques pour l'action de $K\times K$. Ces espaces sont donc indexés par $(\kappa_1,\kappa_2)\in \hat{K}\times\hat{K}$. On note $p_{\kappa_1,\kappa_2}$ le projecteur sur l'espace isotypique indexé par $(\kappa_1,\kappa_2)$. Posons

$$j_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(\pi_{\tau_\lambda},\varphi_1,\varphi_2;\kappa_1,\kappa_2) = p_{\kappa_1,\kappa_2} j_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(\pi_{\tau_\lambda},\varphi_1,\varphi_2) p_{\kappa_1,\kappa_2}.$$

On a

$$(2) \qquad J_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(\pi_{\tau_\lambda},f_1,f_2) = \sum_{\kappa_1,\kappa_2\in\hat{K}} trace(j_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(\pi_{\tau_\lambda},\varphi_1,\varphi_2;\kappa_1,\kappa_2)).$$

Remarquons que l'opérateur $\mathcal{X}_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(\pi_{\tau_\lambda})$ conserve les espaces isotypiques par construction, tandis que $U_{\tau_\lambda}$ envoie l'espace de type $(\kappa_1,\kappa_2)$ sur celui de type $(\kappa_1',\kappa_2')$, où, pour $i=1,2$, $\kappa_i' = ad_{\gamma_0}(\kappa_i\otimes\omega)$. On a donc

$$j_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(\pi_{\tau_\lambda},\varphi_1,\varphi_2;\kappa_1,\kappa_2) = \mathcal{X}_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(\pi_{\tau_\lambda};\kappa_1,\kappa_2)\Pi_{\tau_\lambda}(\varphi_1,\varphi_2;\kappa_1,\kappa_2)U_{\tau_\lambda}(\kappa_1,\kappa_2),$$

où

$$\mathcal{X}_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(\pi_{\tau_\lambda};\kappa_1,\kappa_2) = p_{\kappa_1,\kappa_2}\mathcal{X}_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(\pi_{\tau_\lambda})p_{\kappa_1,\kappa_2};$$

$$\Pi_{\tau_\lambda}(\varphi_1,\varphi_2;\kappa_1,\kappa_2) = p_{\kappa_1,\kappa_2}\left(\overline{\Pi_{\tau_\lambda}(\varphi_1)}\otimes\Pi_{\tau_\lambda}(\varphi_2)\right)p_{\kappa_1',\kappa_2'};$$

$$U_{\tau_\lambda}(\kappa_1,\kappa_2) = p_{\kappa_1',\kappa_2'}U_{\tau_\lambda}p_{\kappa_1,\kappa_2}.$$

Puisque $\tilde{\Pi}_{\boldsymbol{\tau}_{\tilde{\lambda}}}$ est unitaire, ce dernier opérateur est de norme uniformément bornée. Il est clair que les paramètres associés à $\kappa_i$ et $\kappa_i'$ sont de même norme, pour $i=1,2$. D'après [A8] p.174, pour tout réel $r$, il existe une fonction $c_r : C_c^\infty(G(\mathbb{R}))\times C_c^\infty(G(\mathbb{R}))\to\mathbb{R}_{\geq 0}$ qui est bornée par le sup d'un ensemble fini de semi-normes et qui est telle que l'on ait la majoration

$$||\Pi_{\tau_\lambda}(\varphi_1,\varphi_2;\kappa_1,\kappa_2)|| \leq c_r(\varphi_1,\varphi_2)(1+||\mu_\sigma||)^{-r}(1+||\mu_{\kappa_1}||)^{-r}(1+||\mu_{\kappa_2}||)^{-r}(1+||\lambda||)^{-r}.$$

On montrera ci-dessous qu'il existe $C\geq 0$ et un entier $D\geq 0$ de sorte que l'on ait la majoration

$$(3) \qquad ||\mathcal{X}_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(\pi_{\tau_\lambda};\kappa_1,\kappa_2)|| \leq C(1+||\mu_\sigma||)^D(1+||\mu_{\kappa_1}||)^D(1+||\mu_{\kappa_2}||)^D(1+||\lambda||)^D.$$

Donc $trace(j_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(\pi_{\tau_\lambda},\varphi_1,\varphi_2;\kappa_1,\kappa_2))$ est bornée par le produit des deux expressions ci-dessus et des dimensions de $\kappa_1$ et $\kappa_2$. On sait que la dimension de $\kappa$ est essentiellement bornée par $(1+||\mu_\kappa||)^{D'}$ pour un entier $D'$ convenable. On en déduit pour tout réel $r$ une majoration

$$|trace(j_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(\pi_{\tau_\lambda},\varphi_1,\varphi_2;\kappa_1,\kappa_2))| \leq c'_r(\varphi_1,\varphi_2)(1+||\mu_\sigma||)^{-r}(1+||\mu_{\kappa_1}||)^{-r}(1+||\mu_{\kappa_2}||)^{-r}(1+||\lambda||)^{-r},$$

où $c'_r(\varphi_1,\varphi_2)$ est bornée par le sup d'un ensemble fini de semi-normes. Grâce à (2), on obtient

$$|J_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(\pi_{\tau_\lambda},f_1,f_2)| \leq c'_r(\varphi_1,\varphi_2)(1+||\mu_\sigma||)^{-r}(1+||\lambda||)^{-r}\left(\sum_{\kappa\in\hat{K}}(1+||\mu_\kappa||)^{-r}\right)^2.$$

Si $r$ est assez grand, la dernière série est convergente. L'intégrale en $\lambda$ de l'expression ci-dessus l'est aussi et on obtient simplement

$$\int_{i\mathcal{A}_{\tilde{M}}^*}|J_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(\pi_{\tau_\lambda},f_1,f_2)|\,d\lambda \leq C'c'_r(\varphi_1,\varphi_2)(1+||\mu_\sigma||)^{-r},$$

pour une certaine constante absolue $C'$. Remarquons que chaque représentation $\sigma$ de la série discrète de $M_{disc}(\mathbb{R})$ ne donne naissance qu'à un nombre uniformément borné de triplets $\tau$. La sous-somme de $J_{spec}^{\tilde{G}}(\omega,f_1,f_2)$ où on a fixé $\tilde{M}$ et $M_{disc}$, mais où on a remplacé la fonction que l'on intègre par sa valeur absolue, est donc essentiellement majorée par

$$c'_r(\varphi_1,\varphi_2)\sum_\sigma(1+||\mu_\sigma||)^{-r},$$

où on somme sur les représentations irréductibles $\sigma$ de $M_{disc}(\mathbb{R})$ de la série discrète et dont la restriction du caractère central à $\mathcal{A}_{M_{disc}}$ est triviale. Cette dernière condition signifie que $\mu_{\sigma,M_{disc}}=0$. Comme on l'a dit en 1.10, la projection $\mu_\sigma^{M_{disc}}$ parcourt un réseau de $i\mathfrak{h}^{M,*}$. De plus, on sait qu'il n'y a qu'un nombre uniformément borné de séries discrètes d'un paramètre donné. Donc, si $r$ est assez grand, la série ci-dessus est convergente. Cela prouve les assertions du (i) de l'énoncé concernant $J_{spec}^{\tilde{G}}(\omega,f_1,f_2)$. La propriété du terme $c'_r(\varphi_1,\varphi_2)$ prouve en même temps la continuité de cette expression en $f_1$ et $f_2$.

Puique les deux membres de l'égalité du (ii) de l'énoncé sont continus en $f_1$ et $f_2$, cette égalité résulte par continuité du théorème 5.1, les fonctions lisses à support compacts et $K$-finies étant denses dans $C_c^\infty(\tilde{G}(\mathbb{R}))$.

Il reste à prouver la majoration (3). Tout d'abord, en reprenant la preuve du lemme 3.25, on voit que l'on peut remplacer la $(\tilde{G},\tilde{M})$-famile $(\mathcal{X}(\pi_{\tau_\lambda};\Lambda,\tilde{Q}))_{\tilde{Q}\in\mathcal{P}(\tilde{M})}$ par

$$(\mathbf{r}_{reg}(\pi_{\tau_\lambda};\Lambda,\tilde{Q})\mathcal{X}_{reg}(\pi_{\tau_\lambda};\Lambda,\tilde{Q}))_{\tilde{Q}\in\mathcal{P}(\tilde{M})},$$

où $\mathcal{X}_{reg}(\pi_{\tau_\lambda};\Lambda,\tilde{Q})$ ne contient que des opérateurs d'entrelacement normalisés et

$$\mathbf{r}_{reg}(\pi_{\tau_\lambda}:\Lambda,\tilde{Q}) = r_{\bar{Q}|Q}(\sigma_\lambda)r_{\bar{P}|P}(\sigma_\lambda)^{-1}r_{Q|\bar{Q}}(\sigma_{\lambda+\Lambda})r_{P|\bar{P}}(\sigma_{\lambda+\Lambda})^{-1}$$

($\tilde{P}$ est un élément fixé de $\mathcal{P}(\tilde{M})$, cf. 3.25). Notons que cette fonction est produit de fonctions $r_\alpha(\sigma_\lambda)r_{-\alpha}(\sigma_\lambda)^{-1}$ et $r_\alpha(\sigma_{\lambda+\Lambda})r_{-\alpha}(\sigma_{\lambda+\Lambda})^{-1}$ comme en 1.10. Evidemment, $\mathcal{X}_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(\pi_{\tau_\lambda};\kappa_1,\kappa_2)$ se déduit de la $(\tilde{G},\tilde{M})$-famille $(\mathbf{r}_{reg}(\pi_{\tau_\lambda}:\Lambda,\tilde{Q})p_{\kappa_1,\kappa_2}\mathcal{X}_{reg}(\pi_{\tau_\lambda};\Lambda,\tilde{Q})p_{\kappa_1,\kappa_2})_{\tilde{Q}\in\mathcal{P}(\tilde{M})}$. La formule 1.7(1) montre qu'il nous suffit de majorer les valeurs en $\Lambda=0$ des dérivées en $\Lambda$

d'ordre au plus $a_{\tilde{M}} - a_{\tilde{G}}$ de tous les termes intervenant dans la définition de la $(\tilde{G}, \tilde{M})$-famille ci-dessus. Les opérateurs d'entrelacement normalisés étant unitaires, cela nous ramène à majorer les opérateurs

$$(4) \qquad D(p_{\kappa_1,\kappa_2} R_{Q|P}(\sigma_\lambda) p_{\kappa_1,\kappa_2})$$

et les fonctions

$$(5) \qquad D(r_\alpha(\sigma_\lambda) r_{-\alpha}(\sigma_\lambda)^{-1})$$

où $D$ est une dérivation d'ordre au plus $a_{\tilde{M}} - a_{\tilde{G}}$ s'appliquant à la variable $\lambda$. Comme on l'a dit ci-dessus, nos hypothèses entraînent $\mu_{\sigma,M_{disc}} = 0$, donc $\mu_\sigma$ est orthogonal à $\lambda$. La majoration cherchée de (4) résulte alors du lemme 2.1 de [A5]. On a décrit les fonctions $r_\alpha(\sigma_\lambda) r_{-\alpha}(\sigma_\lambda)^{-1}$ en 1.10. Compte tenu de l'égalité $\mu_{\sigma,M_{disc}} = 0$, elles sont produit de termes

$$(6) \qquad \frac{< \mu_\sigma, \check{\beta} > - < \lambda, \check{\beta} >}{< \mu_\sigma, \check{\beta} > + < \lambda, \check{\beta} >}$$

et éventuellement d'un terme

$$\frac{\Gamma(\frac{<\lambda,\check{\beta}>}{2})\Gamma(\frac{-<\lambda,\check{\beta}>+1}{2})}{\Gamma(\frac{-<\lambda,\check{\beta}>}{2})\Gamma(\frac{<\lambda,\check{\beta}>+1}{2})}.$$

Ce dernier terme a des dérivées à croissance modérée et ne dépend pas de $\mu_\sigma$. Il vérifie donc la majoration requise. Considérons une fonction (6). Il résulte de ce que l'on a rappelé en 1.10 que le produit $< \mu_\sigma, \check{\beta} >$ appartient à un sous-groupe discret fixe de $\mathbb{R}$, tandis que $< \lambda, \check{\beta} >$ est imaginaire. Ou bien $< \mu_\sigma, \check{\beta} >= 0$ et la fonction est constante égale à $-1$. Ou bien $< \mu_\sigma, \check{\beta} >\neq 0$ et alors la valeur absolue du dénominateur est uniformément minorée par une constante strictement positive. La majoration (5) requise s'ensuit. Cela achève la preuve. $\square$

## 5.3 Formules de descente pour les $(\tilde{G}, \tilde{M})$-familles

On rappelle dans ce paragraphe plusieurs formules générales d'Arthur concernant les $(\tilde{G}, \tilde{M})$-familles. Pour $i = 1, 2$, soient $\tilde{M}_i \in \mathcal{L}(\tilde{M}_0)$ et $(x_i(\Lambda; \tilde{P}))_{\tilde{P}\in\mathcal{P}(\tilde{M}_i)}$ une $(\tilde{G}, \tilde{M}_i)$-famille. Soit $\tilde{L} \in \mathcal{L}(\tilde{M}_0)$ tel que $\tilde{M}_i \subset \tilde{L}$ pour $i = 1, 2$. De la $(\tilde{G}, \tilde{M}_i)$-famille $(x_i(\Lambda; \tilde{P}))_{\tilde{P}\in\mathcal{P}(\tilde{M}_i)}$ se déduit une $(\tilde{G}, \tilde{L})$-famille $(x_i(\Lambda; \tilde{Q}))_{\tilde{Q}\in\mathcal{P}(\tilde{L})}$. Pour $\Lambda \in i\mathcal{A}^*_{\tilde{L}}$, on a $x_i(\Lambda; \tilde{Q}) = x_i(\Lambda; \tilde{P})$ pour $\tilde{P} \in \mathcal{P}(\tilde{M}_i)$ tel que $P \subset Q$. Notons $(y(\Lambda, \tilde{Q}))_{\tilde{Q}\in\mathcal{P}(\tilde{L})}$ la famille produit, c'est-à-dire $y(\Lambda, \tilde{Q}) = x_1(\Lambda, \tilde{Q}) x_2(\Lambda, \tilde{Q})$. De cette $(\tilde{G}, \tilde{L})$-famille se déduit une fonction $y^{\tilde{G}}_{\tilde{L}}(\Lambda)$ sur $i\mathcal{A}^*_{\tilde{L}}$. Rappelons que, pour $i = 1, 2$ et pour tout $\tilde{Q}_i = \tilde{L}_i U_{Q_i} \in \mathcal{F}(\tilde{M}_i)$, on déduit de $(x_i(\Lambda; \tilde{P}))_{\tilde{P}\in\mathcal{P}(\tilde{M}_i)}$ une $(\tilde{L}_i, \tilde{M}_i)$-famille $(x^{\tilde{Q}_i}_i(\Lambda; \tilde{P}))_{\tilde{P}\in\mathcal{P}^{\tilde{Q}_i}(\tilde{M}_i)}$, où $\mathcal{P}^{\tilde{Q}_i}(\tilde{M}_i)$ est l'ensemble des $\tilde{P} \in \mathcal{P}(\tilde{M}_i)$ tels que $\tilde{P} \subset \tilde{Q}_i$. D'où une fonction $x^{\tilde{Q}_i}_{i,\tilde{M}_i}(\Lambda)$ sur $i\mathcal{A}^*_{\tilde{M}_i}$. Dans l'espace $\mathcal{A}^{\tilde{G}}_{\tilde{M}_1} \oplus \mathcal{A}^{\tilde{G}}_{\tilde{M}_2}$, introduisons l'image $\Delta(\mathcal{A}^{\tilde{G}}_{\tilde{L}})$ de $\mathcal{A}^{\tilde{G}}_{\tilde{L}}$ par le plongement diagonal. Notons $\Delta(\mathcal{A}^{\tilde{G}}_{\tilde{L}})^\perp$ son orthogonal. Pour tout couple $(\tilde{L}_1, \tilde{L}_2) \in \mathcal{L}(\tilde{M}_1) \times \mathcal{L}(\tilde{M}_2)$, considérons les conditions suivantes

(1) $\Delta(\mathcal{A}^{\tilde{G}}_{\tilde{L}}) \oplus (\mathcal{A}^{\tilde{G}}_{\tilde{L}_1} \oplus \mathcal{A}^{\tilde{G}}_{\tilde{L}_2}) = \mathcal{A}^{\tilde{G}}_{\tilde{M}_1} \oplus \mathcal{A}^{\tilde{G}}_{\tilde{M}_2}$ ;

(2) $\Delta(\mathcal{A}^{\tilde{G}}_{\tilde{L}})^\perp \oplus (\mathcal{A}^{\tilde{L}_1}_{\tilde{M}_1} \oplus \mathcal{A}^{\tilde{L}_2}_{\tilde{M}_2}) = \mathcal{A}^{\tilde{G}}_{\tilde{M}_1} \oplus \mathcal{A}^{\tilde{G}}_{\tilde{M}_2}$ ;

(3) l'application

$$\begin{array}{ccc}\mathcal{A}_{\tilde{M}_1}^{\tilde{L}_1}\oplus\mathcal{A}_{\tilde{M}_2}^{\tilde{L}_2} & \to & \mathcal{A}_{\tilde{L}}^{\tilde{G}}\\ (H_1,H_2) & \mapsto & H_{1,\tilde{L}}+H_{2,\tilde{L}}\end{array}$$

est un isomorphisme.

On vérifie qu'elles sont équivalentes. Si elles le sont, on note $d_{\tilde{M}_1,\tilde{M}_2}^{\tilde{G}}(\tilde{L};\tilde{L}_1,\tilde{L}_2)$ le jacobien de l'isomorphisme (3), chaque espace étant muni des mesures fixées en 1.2. Si les conditions ne sont pas vérifiées, on pose $d_{\tilde{M}_1,\tilde{M}_2}^{\tilde{G}}(\tilde{L};\tilde{L}_1,\tilde{L}_2)=0$. Fixons un point $\xi\in\mathcal{A}_{\tilde{M}_1}^{\tilde{G}}\oplus\mathcal{A}_{\tilde{M}_2}^{\tilde{G}}$ en position générale. Si les conditions ci-dessus sont vérifiées, notons $(\xi_1,\xi_2)\in\mathcal{A}_{\tilde{L}_1}^{\tilde{G}}\oplus\mathcal{A}_{\tilde{L}_2}^{\tilde{G}}$ la projection (non orthogonale) de $\xi$ relativement à la décomposition (1). Puisque $\xi$ est en position générale, il existe pour $i=1,2$ un unique $\tilde{Q}_i\in\mathcal{P}(\tilde{L}_i)$ tel que $\xi_i$ soit dans la chambre positive associée à cet espace parabolique. Cela définit une application qui, à $(\tilde{L}_1,\tilde{L}_2)$ tel que $d_{\tilde{M}_1,\tilde{M}_2}^{\tilde{G}}(\tilde{L};\tilde{L}_1,\tilde{L}_2)\neq 0$, associe un couple $(\tilde{Q}_1,\tilde{Q}_2)\in\mathcal{P}(\tilde{L}_1)\times\mathcal{P}(\tilde{L}_2)$.

On a l'égalité

$$(4)\qquad y_{\tilde{L}}^{\tilde{G}}(\Lambda)=\sum_{\tilde{L}_1\in\mathcal{L}(\tilde{M}_1),\tilde{L}_2\in\mathcal{L}(\tilde{M}_2)}d_{\tilde{M}_1,\tilde{M}_2}^{\tilde{G}}(\tilde{L};\tilde{L}_1,\tilde{L}_2)x_{1,\tilde{M}_1}^{\tilde{Q}_1}(\Lambda)x_{2,\tilde{M}_2}^{\tilde{Q}_2}(\Lambda)$$

pour tout $\Lambda\in i\mathcal{A}_{\tilde{L}}^*$.

Dans le cas non tordu, cela résulte de [A6] proposition 7.1, appliquée au groupe $G\times G$, à son Levi $M_1\times M_2$ et à l'espace $\mathfrak{b}=\Delta(\mathcal{A}_L^G)\oplus(\mathcal{A}_G\oplus\mathcal{A}_G)$. La preuve s'étend au cas tordu.

On utilisera un cas particulier de la relation (4) où les définitions se simplifient. Soient $\tilde{M},\tilde{M}_1,\tilde{M}_2\in\mathcal{L}(\tilde{M}_0)$ tels que $\tilde{M}\subset\tilde{M}_i$ pour $i=1=2$ et $\mathcal{A}_{\tilde{M}}^{\tilde{M}_1}\cap\mathcal{A}_{\tilde{M}}^{\tilde{M}_2}=0$. Il existe un unique $\tilde{L}\in\mathcal{L}(\tilde{M})$ tel que

$$\mathcal{A}_{\tilde{L}}=\mathcal{A}_{\tilde{M}_1}\cap\mathcal{A}_{\tilde{M}_2},$$

à savoir le commutant dans $\tilde{G}$ du tore $(A_{\tilde{M}_1}\cap A_{\tilde{M}_2})^0$. On a les égalités équivalentes

$$\mathcal{A}_{\tilde{M}}^{\tilde{L}}=\mathcal{A}_{\tilde{M}_1}^{\tilde{L}}\oplus\mathcal{A}_{\tilde{M}_2}^{\tilde{L}},$$

$$(5)\qquad \mathcal{A}_{\tilde{M}}^{\tilde{L}}=\mathcal{A}_{\tilde{M}}^{\tilde{M}_1}\oplus\mathcal{A}_{\tilde{M}}^{\tilde{M}_2}.$$

On voit que les conditions équivalentes (1), (2) et (3) sont équivalentes aux deux égalités équivalentes

$$(6)\qquad \mathcal{A}_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}=\mathcal{A}_{\tilde{L}_1}^{\tilde{G}}\oplus\mathcal{A}_{\tilde{L}_2}^{\tilde{G}},$$

$$(7)\qquad \mathcal{A}_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}=\mathcal{A}_{\tilde{M}}^{\tilde{L}_1}\oplus\mathcal{A}_{\tilde{M}}^{\tilde{L}_2}.$$

Supposons ces conditions vérifiées. On note $d_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(\tilde{L}_1,\tilde{L}_2)$ le jacobien de l'application somme

$$\mathcal{A}_{\tilde{M}}^{\tilde{L}_1}\oplus\mathcal{A}_{\tilde{M}}^{\tilde{L}_2}\to\mathcal{A}_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}$$

qui est un isomorphisme d'après (7). De même, grâce (5), on définit le jacobien $d_{\tilde{M}}^{\tilde{L}}(\tilde{M}_1,\tilde{M}_2)$. On vérifie qu'alors

$$(8)\qquad d_{\tilde{M}_1,\tilde{M}_2}^{\tilde{G}}(\tilde{L};\tilde{L}_1,\tilde{L}_2)=d_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(\tilde{L}_1,\tilde{L}_2)d_{\tilde{M}}^{\tilde{L}}(\tilde{M}_1,\tilde{M}_2)^{-1}.$$

Fixons $H \in \mathcal{A}_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}$ en position générale. Grâce à (6), on peut l'écrire $H = H_1 - H_2$, où $H_i \in \mathcal{A}_{\tilde{L}_i}^{\tilde{G}}$ pour $i = 1, 2$. Comme précédemment, $H_i$ détermine un espace parabolique $\tilde{Q}_i \in \mathcal{P}(\tilde{L}_i)$. On vérifie que $(\tilde{Q}_1, \tilde{Q}_2)$ coïncide avec le couple déterminé précédemment pour un choix convenable de $\xi$.

Un cas encore plus particulier est celui où $\tilde{M}_1 = \tilde{M}_2 = \tilde{M}$. Alors $\tilde{L} = \tilde{M}$ et la relation (4) prend la forme

$$(9) \qquad y_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(\Lambda) = \sum_{\tilde{L}_1, \tilde{L}_2 \in \mathcal{L}(\tilde{M})} d_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(\tilde{L}_1, \tilde{L}_2) x_{1,\tilde{M}}^{\tilde{Q}_1}(\Lambda) x_{2,\tilde{M}}^{\tilde{Q}_2}(\Lambda).$$

Cf. [A6] corollaire 7.4.

Soient maintenant $\tilde{M}, \tilde{L} \in \mathcal{L}(\tilde{M}_0)$ tels que $\tilde{M} \subset \tilde{L}$ et soit $(x(\Lambda; \tilde{P}))_{\tilde{P} \in \mathcal{P}(\tilde{M})}$ une $(\tilde{G}, \tilde{M})$-famille. On en déduit une $(\tilde{G}, \tilde{L})$-famille puis une fonction $x_{\tilde{L}}^{\tilde{G}}(\Lambda)$ sur $i\mathcal{A}_{\tilde{L}}^*$. On a l'égalité

$$(10) \qquad x_{\tilde{L}}^{\tilde{G}}(\Lambda) = \sum_{\tilde{L}' \in \mathcal{L}(\tilde{M})} d_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(\tilde{L}, \tilde{L}') x_{\tilde{M}}^{\tilde{Q}'}(\Lambda),$$

où $\tilde{Q}'$ est le second terme de l'image de couple $(\tilde{L}, \tilde{L}')$ par l'application décrite ci-dessus.

## 5.4 Application des formules de descente

Soit $\tilde{M} \in \mathcal{L}(\tilde{M}_0)$. Pour $x \in G(F)$, on définit la $(\tilde{G}, \tilde{M})$-famille $(v(x; \Lambda, \tilde{P}))_{\tilde{P} \in \mathcal{P}(\tilde{M})}$, où $v(x; \Lambda, \tilde{P}) = e^{-<\Lambda, H_{\tilde{P}}(x)>}$. On en déduit une fonction $v_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(x; \Lambda)$. On pose $v_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(x) = v_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(x; 0)$. Pour $f \in C_c^\infty(\tilde{G}(F))$ et $\gamma \in \tilde{M}(F) \cap \tilde{G}_{reg}(F)$ tel que $\omega$ soit trivial sur $Z_G(\gamma, F)$, on définit l'intégrale orbitale pondérée

$$(1) \qquad J_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(\gamma, \omega, f) = D^{\tilde{G}}(\gamma)^{1/2} \int_{Z_G(\gamma,F) \backslash G(F)} \omega(x) f(x^{-1} \gamma x) v_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(x)\, dx.$$

Si $\omega$ est non trivial sur $Z_G(\gamma, F)$, on pose $J_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(\gamma, \omega, f) = 0$.

D'autre part, pour une $\omega$-représentation tempérée et de longueur finie $\tilde{\pi}$ de $\tilde{M}(F)$, on a défini en 2.7 le caractère pondéré $J_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(\tilde{\pi}, f)$ dans le cas où $f$ est $K$-finie. Les calculs du paragraphe 5.2 montrent que cette distribution s'étend continûment à toutes les fonctions $f \in C_c^\infty(\tilde{G}(F))$.

Soient $f \in C_c^\infty(\tilde{G}(F))$ et $\tilde{P} = \tilde{M} U_P \in \mathcal{P}(\tilde{M}_0)$. On définit une fonction $f_{\tilde{P}}$ sur $\tilde{M}(F)$ par la formule habituelle

$$f_{\tilde{P}}(x) = \delta_{\tilde{P}}(x)^{1/2} \int_{U_P(F)} \int_K \omega(k) f(k^{-1} x u k)\, dk\, du.$$

Cette fonction appartient à $C_c^\infty(\tilde{M}(F))$.

**Lemme**. *(i) Soient $f_1, f_2 \in C_c^\infty(\tilde{G}(F))$ et $\gamma \in \tilde{M}(F) \cap \tilde{G}_{reg}(F)$. On a l'égalité*

$$J_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(\gamma, \omega, f_1, f_2) = \sum_{\tilde{L}_1, \tilde{L}_2 \in \mathcal{L}(\tilde{M})} d_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(\tilde{L}_1, \tilde{L}_2) \overline{J_{\tilde{M}}^{\tilde{L}_1}(\gamma, \omega, f_{1,\tilde{Q}_1})} J_{\tilde{M}}^{\tilde{L}_2}(\gamma, \omega, f_{2,\tilde{Q}_2}).$$

*(ii) Soient $f_1, f_2 \in C_c^\infty(\tilde{G}(F))$, $\boldsymbol{\tau} \in \mathcal{E}_{disc}(\tilde{M}, \omega)$ et $\tilde{\lambda} \in i\tilde{\mathcal{A}}_{\tilde{M},F}^*$. On a l'égalité*

$$J_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(\pi_{\tau_\lambda}, f_1, f_2) = \sum_{\tilde{L}_1, \tilde{L}_2 \in \mathcal{L}(\tilde{M})} d_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(\tilde{L}_1, \tilde{L}_2) \overline{J_{\tilde{M}}^{\tilde{L}_1}(\tilde{\pi}_{\boldsymbol{\tau}_{\tilde{\lambda}}}, f_{1,\tilde{Q}_1})} J_{\tilde{M}}^{\tilde{L}_2}(\tilde{\pi}_{\boldsymbol{\tau}_{\tilde{\lambda}}}, f_{2,\tilde{Q}_2}).$$

(iii) *Soient* $f \in C_c^\infty(\tilde{G}(F))$, $\gamma \in \tilde{M}(F) \cap \tilde{G}_{reg}(F)$ *et* $\tilde{L} \in \mathcal{L}(\tilde{M})$. *On a l'égalité*

$$J_{\tilde{L}}^{\tilde{G}}(\gamma, \omega, f) = \sum_{\tilde{L}' \in \mathcal{L}(\tilde{M})} d_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(\tilde{L}, \tilde{L}') J_{\tilde{M}}^{\tilde{L}'}(\gamma, \omega, f_{\tilde{Q}'}).$$

(iv) *Soient* $f \in C_c^\infty(\tilde{G}(F))$, $\tilde{\pi}$ *une* $\omega$*-représentation tempérée de longueur finie de* $\tilde{M}(F)$ *et* $\tilde{L} \in \mathcal{L}(\tilde{M})$. *Posons* $\tilde{\Pi} = Ind_{\tilde{P}}^{\tilde{L}}(\tilde{\pi})$, *où* $\tilde{P}$ *est un élément de* $\mathcal{P}^{\tilde{L}}(\tilde{M})$. *Alors on a l'égalité*

$$J_{\tilde{L}}^{\tilde{G}}(\tilde{\Pi}, f) = \sum_{\tilde{L}' \in \mathcal{L}(\tilde{M})} d_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(\tilde{L}, \tilde{L}') J_{\tilde{M}}^{\tilde{L}'}(\tilde{\pi}, f_{\tilde{Q}'}).$$

La preuve est basée sur les formules 5.3(9) et (10) appliquées aux $(\tilde{G}, \tilde{M})$-familles intervenant dans les définitions des membres de gauche. On la laisse au lecteur.

On aura besoin plus tard des propriétés suivantes. Soient $\tilde{M} \in \mathcal{L}(\tilde{M}_0)$ et $\tilde{T}$ un sous-tore tordu maximal de $\tilde{M}$ tel que $\omega$ soit trivial sur $T^\theta(F)$. Alors

(2) pour tout $f \in C_c^\infty(\tilde{G}(F))$, la fonction $\gamma \mapsto J_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(\gamma, \omega, f)$ est lisse sur $\tilde{T}(F) \cap \tilde{G}_{reg}(F)$.

En effet, au voisinage d'un point régulier, $J_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(\gamma, \omega, f)$ est l'intégrale sur un compact d'une fonction lisse en $\gamma$ et en la variable d'intégration.

(3) il existe un entier $N \geq 0$ et, pour tout $f \in C_c^\infty(\tilde{G}(F))$, il existe $c > 0$ tel que $|J_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(\gamma, \omega, f)| \leq c(1 + |log(D^{\tilde{G}}(\gamma))|)^N$.

Preuve. Comme on l'a déjà utilisé plusieurs fois, il résulte de la variante tordue de 1.7(1) et de 4.2(7) qu'il existe $N \geq 0$ indépendant de $f$ et $c' > 0$ tel que, pour $x$ contribuant à la formule (1), on ait $v_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(x) \leq c'(1 + |log(D^{\tilde{G}}(\gamma))|)^N$. Alors

$$|J_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(\gamma, \omega, f)| \leq c'(1 + |log(D^{\tilde{G}}(\gamma))|)^N D^{\tilde{G}}(\gamma)^{1/2} \int_{Z_G(\gamma,F) \backslash G(F)} |f(x^{-1}\gamma x)|\, dx.$$

Il reste à appliquer 4.2(1) pour obtenir (3). □

## 5.5 Le théorème 0

**Théorème**. *Soit* $f \in C_c^\infty(\tilde{G}(F))$. *Supposons* $I_{\tilde{G}}(\tilde{\pi}, f) = 0$ *pour toute* $\omega$*-représentation irréductible tempérée* $\tilde{\pi}$ *de* $\tilde{G}(F)$. *Alors* $I_{\tilde{G}}(\gamma, \omega, f) = 0$ *pour tout* $\gamma \in \tilde{G}_{reg}(F)$.

**Remarques.** (1) On n'a défini dans cet article que les intégrales orbitales relatives à des éléments $\gamma \in \tilde{G}_{reg}(F)$. Mais on sait bien qu'on peut les définir pour tout $\gamma \in \tilde{G}(F)$. Par la théorie de la descente, on montre que leur comportement local est le même que dans le cas non tordu. Cest-à-dire que les intégrales orbitales aux points singuliers s'expriment à l'aide d'intégrales orbitales aux points réguliers, soit grâce aux germes de Shalika dans le cas non-archimédien, soit par l'action d'opérateurs différentiels dans le cas archimédien. On peut donc renforcer la conclusion du théorème : $I_{\tilde{G}}(\gamma, \omega, f) = 0$ pour tout $\gamma \in \tilde{G}(F)$ tel que $\omega$ soit trivial sur $Z_G(\gamma, F)$.

(2) Dans le cas non-archimédien, on montre comme dans le cas non tordu qu'une fonction $f \in C_c^\infty(\tilde{G}(F))$ dont toutes les intégrales orbitales sont nulles est annulée par toute forme linéaire $l$ sur $C_c^\infty(\tilde{G}(F))$ qui vérifie la relation $l(f^x) = \omega(x)l(f)$ pour tout $f \in C_c^\infty(\tilde{G}(F))$ et tout $x \in G(F)$, où $f^x$ est la fonction $f^x(\gamma) = f(x\gamma x^{-1})$.

(3) Dans le cas non-archimédien, le théorème a été prouvé dans [HL].

Preuve. On raisonne par récurence sur la dimension de $\tilde{G}$. Soit $\tilde{M}$ un espace de Levi semi-standard propre. Fixons $\tilde{P} \in \mathcal{P}(\tilde{M})$. Pour une $\omega$-représentation admisslble $\tilde{\pi}$ de $\tilde{M}(F)$, on a l'égalité $I_{\tilde{M}}(\tilde{\pi}, f_{\tilde{P}}) = I_{\tilde{G}}(\tilde{\Pi}, f)$, où $\Pi = Ind_{\tilde{P}}^{\tilde{G}}(\tilde{\pi})$. La fonction $f_{\tilde{P}}$ vérifie donc la même hypothèse que $f$. Donc, par l'hypothèse de récurrence, $I_{\tilde{M}}(\gamma, \omega, f_{\tilde{P}}) = 0$ pour tout $\gamma \in \tilde{M}_{reg}(F)$. Mais, pour $\gamma \in \tilde{M}(F) \cap \tilde{G}_{reg}(F)$, on a l'égalité $I_{\tilde{G}}(\gamma, \omega, f) = I_{\tilde{M}}(\gamma, \omega, f_{\tilde{P}})$. Donc $I_{\tilde{G}}(\gamma, \omega, f) = 0$. Cela prouve le résultat pour tout $\gamma \in \tilde{G}_{reg}(F)$ qui n'est pas elliptique. Pour traiter le cas des éléments elliptiques, considérons une fonction $f_2 \in C_c^\infty(\tilde{G}(F))$ à support dans l'ensemble $\tilde{G}_{ell}(F)$ des éléments elliptiques réguliers de $\tilde{G}(F)$. Soient $\tilde{M}$ un espace de Levi de $\tilde{G}$, $\tau \in E_{disc}(\tilde{M}, \omega)$ et $\lambda \in i\mathcal{A}_{\tilde{M},F}^*$. On relève $\tau$ en $\boldsymbol{\tau} \in \mathcal{E}_{disc}(\tilde{M}, \omega)$ et $\lambda$ en $\tilde{\lambda} \in i\tilde{\mathcal{A}}_{\tilde{M},F}^*$. Le terme $J_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(\pi_{\tau_\lambda}, f, f_2)$ est calculé par le lemme 5.4(ii). Si $\tilde{Q}_2$ est un espace parabolique propre de $\tilde{G}$, l'hypothèse sur le support de $f_2$ entraîne que $f_{2,\tilde{Q}_2} = 0$. La formule se simplifie donc en

$$J_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(\pi_{\tau_\lambda}, f, f_2) = \overline{J_{\tilde{M}}^{\tilde{M}}(\tilde{\pi}_{\boldsymbol{\tau}_{\tilde{\lambda}}}, f_{\bar{\tilde{Q}}})} J_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(\tilde{\pi}_{\boldsymbol{\tau}_{\tilde{\lambda}}}, f_2),$$

où $\tilde{Q}$ est un certain élément de $\mathcal{P}(\tilde{M})$. On a

$$J_{\tilde{M}}^{\tilde{M}}(\tilde{\pi}_{\boldsymbol{\tau}_{\tilde{\lambda}}}, f_{\bar{\tilde{Q}}}) = I_{\tilde{M}}^{\tilde{M}}(\tilde{\pi}_{\boldsymbol{\tau}_{\tilde{\lambda}}}, f_{\bar{\tilde{Q}}}) = I_{\tilde{G}}(\tilde{\Pi}, f),$$

où $\tilde{\Pi} = Ind_{\bar{\tilde{Q}}}^{\tilde{G}}(\tilde{\pi}_{\boldsymbol{\tau}_{\tilde{\lambda}}})$. La représentation $\tilde{\Pi}$ est tempérée, donc $I_{\tilde{G}}(\tilde{\Pi}, f) = 0$. Cela prouve que $J_{spec}^{\tilde{G}}(\omega, f, f_2) = 0$. Appliquons la proposition 5.2 : elle entraîne $J_{géom}^{\tilde{G}}(\omega, f, f_2) = 0$. Pour un espace de Levi propre $\tilde{M}$ et un élément $\tilde{S} \in T_{ell}(\tilde{M}, \omega)$, on a $J_{\tilde{M},\tilde{S}}(\omega, f, f_2) = 0$ : l'hypothèse sur le support de $f_2$ entraîne que $f_2(y^{-1}\gamma y) = 0$ pour tout $y \in G(F)$ et tout $\gamma \in \tilde{S}(F)$. On a donc

$$J_{géom}^{\tilde{G}}(\omega, f, f_2) = \sum_{\tilde{S} \in T_{ell}(\tilde{G}, \omega)} |W^G(\tilde{S})|^{-1} mes(A_{\tilde{G}}(F) \backslash S^\theta(F))$$

$$\int_{\tilde{S}(F)/(1-\theta)(S(F))} \overline{I_{\tilde{G}}(\gamma, \omega, f)} I_{\tilde{G}}(\gamma, \omega, f_2) \, d\gamma.$$

Soit maintenant $\gamma \in \tilde{G}_{ell}(F)$ tel que $\omega$ soit trivial sur $Z_G(\gamma, F)$. On veut montrer que $I_{\tilde{G}}(\gamma, \omega, f) = 0$. On peut conjuguer $\gamma$ et supposer que $\gamma \in \tilde{S}(F)$ pour un $\tilde{S}$ intervenant dans la formule ci-dessus. On fait maintenant parcourir à $f_2$ une suite de fonctions $(f_{2,n})_{n \in \mathbb{N}}$ à valeurs positives ou nulles, non nulles en $\gamma$, et à supports dans des voisinages de plus en plus petits de $\gamma$. On voit que l'expression ci-dessus est de la forme

$$\int_{S^{\theta,0}(F)} \overline{I_{\tilde{G}}(x\gamma, \omega, f)} A_n(x) \, dx$$

où $A_n$ parcourt une suite de fonctions lisses sur $S^{\theta,0}(F))$ à valeurs positives ou nulles, non nulles en $x = 1$, et à supports dans des voisinages de plus en plus petits de 1. Puisque $x \mapsto I_{\tilde{G}}(x\gamma, \omega, f)$ est lisse, la nullité de l'expression ci-dessus pour tout $n$ entraîne $I_{\tilde{G}}(\gamma, \omega, f) = 0$. $\square$

# 6 La formule invariante

## 6.1 Le théorème de Paley-Wiener

Notons $\mathcal{K}$ le groupe de Grothendieck de l'ensemble des classes d'isomorphisme de $\omega$-représentations tempérées de longueur finie de $\tilde{G}(F)$. Notons $\mathcal{F}$ l'espace des fonctions linéaires de $\mathcal{K}$ dans $\mathbb{C}$ qui sont nulles sur toute $\omega$-représentation tempérée irréductible et non $G$-irréductible. Remarquons que $\mathcal{F}$ s'identifie à l'espace des fonctions à valeurs complexes sur l'ensemble des classes d'isomorphisme de $\omega$-représentations tempérées $G$-irréductibles de $\tilde{G}(F)$. Notons $\mathcal{PW}(\tilde{G},\omega)$ le sous-ensemble des éléments $\varphi \in \mathcal{F}$ vérifiant les conditions suivantes :

(1) soient $\tilde{Q} = \tilde{L}U_Q$ un espace parabolique tel que $\omega$ soit trivial sur $Z_L(F)^\theta$ et $\tilde{\pi}$ une $\omega$-représentation tempérée et $L$-irréductible de $\tilde{L}(F)$ ; alors la fonction $\tilde{\lambda} \mapsto \varphi(Ind_{\tilde{Q}}^{\tilde{G}}(\tilde{\pi}_{\tilde{\lambda}}))$ sur $i\tilde{\mathcal{A}}^*_{\tilde{L},F}$ est de Paley-Wiener (cf. 2.6) ;

(2) si $F$ est non-archimédien, il existe un sous-groupe ouvert compact $H$ de $\tilde{G}(F)$ tel que $\varphi(\tilde{\pi}) = 0$ pour toute $\omega$-représentation tempérée $\tilde{\pi}$ telle que le sous-espace des invariants par $H$ dans $\pi$ soit nul ;

(3) si $F$ est archimédien, il existe un ensemble fini $\kappa_1, ..., \kappa_n$ de représentations irréductibles de $K$ tel que $\varphi(\tilde{\pi}) = 0$ pour toute $\omega$-représentation tempérée $\tilde{\pi}$ telle que, pour tout $i$, l'espace isotypique de type $\kappa_i$ dans $\pi$ soit nul.

Notons $\underline{pw}_{\tilde{G}} : C_c^\infty(\tilde{G}(F),K) \to \mathcal{F}$ l'application linéaire qui, à $f \in C_c^\infty(\tilde{G}(F),K)$, associe la fonction $\tilde{\pi} \mapsto I_{\tilde{G}}(\tilde{\pi}, f)$. Notons $I(\tilde{G}(F),K,\omega)$ le quotient de $C_c^\infty(\tilde{G}(F),K)$ par le sous-espace des $f \in C_c^\infty(\tilde{G}(F),K)$ telles que $I_{\tilde{G}}(\gamma,\omega,f) = 0$ pour tout $\gamma \in \tilde{G}_{reg}(F)$.

**Théorème**. *L'application linéaire $\underline{pw}_{\tilde{G}}$ a pour image $\mathcal{PW}(\tilde{G},\omega)$ et se quotiente en un isomorphisme de $I(\tilde{G}(F),K,\omega)$ sur cet espace.*

Quand $F$ est non-archimédien, le théorème a été démontré dans [R] pour $\omega = 1$ et en général dans [HL]. Si $F = \mathbb{R}$, la première assertion du théorème est démontrée dans [DM] pour $\omega = 1$. Nous montrerons en 6.4 que le cas $\omega \neq 1$ s'en déduit. Si $F = \mathbb{C}$, l'assertion est équivalente à celle pour l'espace tordu sur $\mathbb{R}$ déduit de $\tilde{G}$ par restriction des scalaires. La deuxième assertion est facile : le théorème 5.5 montre que tout élément du noyau a des intégrales orbitales nulles ; la réciproque provient de la locale intégrabilité des caractères des $\omega$-représentations $G$-irréductibles, cf. 2.5(2).

**Complément au théorème.** Supposons $F$ non-archimédien. Soit $H$ un sous-groupe ouvert compact de $G(F)$. Notons $\mathcal{PW}(\tilde{G},\omega)^H$ le sous-espace des fonctions $\varphi \in \mathcal{PW}(\tilde{G},\omega)$ tels que $\varphi(\tilde{\pi}) = 0$ pour toute $\omega$-représentation tempérée $\tilde{\pi}$ telle que le sous-espace des invariants par $H$ dans $\pi$ soit nul. Notons $C_c^\infty(H\backslash\tilde{G}(F)/H)$ le sous-espace des éléments de $C_c^\infty(\tilde{G}(F))$ qui sont biinvariants par $H$. Alors, $H$ étant donné, il existe $H'$ tel que $\mathcal{PW}(\tilde{G},\omega)^H$ soit contenu dans $\underline{pw}_{\tilde{G}}(C_c^\infty(H'\backslash\tilde{G}(F)/H'))$. Cf. [HL].

Supposons $F$ archimédien. Soit $\underline{\kappa}$ un ensemble fini de représentations irréductibles de $K$. Notons $\mathcal{PW}(\tilde{G},\omega)^{\underline{\kappa}}$ le sous-espace des fonctions $\varphi \in PW(\tilde{G},\omega)$ tels que $\varphi(\tilde{\pi}) = 0$ pour toute $\omega$-représentation tempérée $\tilde{\pi}$ telle que, pour tout $\kappa \in \underline{\kappa}$, l'espace isotypique de type $\kappa$ dans $\pi$ soit nul. Notons $C_c^\infty(\tilde{G}(F),\underline{\kappa})$ le sous-espace des $f \in C_c^\infty(\tilde{G}(F))$ tels que la représentation de $K \times K$ dans l'espace engendré par les translatés de $f$ à droite et à gauche par des éléments de $K$ n'ait pour composantes irréductibles que des éléments de $\underline{\kappa}\times\underline{\kappa}$. Alors, $\underline{\kappa}$ étant donné, il existe $\underline{\kappa}'$ tel que $\mathcal{PW}(\tilde{G}(F))^{\underline{\kappa}}$ soit contenu dans $\underline{pw}_{\tilde{G}}(C_c^\infty(\tilde{G}(F),\underline{\kappa}'))$. Ceci n'est pas énoncé dans [DM], mais résulte clairement de la preuve.

## 6.2 Deuxième forme du théorème de Paley-Wiener

On rappelle que l'on a défini l'ensemble $\mathcal{E}(\tilde{G},\omega)$ en 2.9. Il est muni d'une action de $i\tilde{\mathcal{A}}^*_{\tilde{G},F}$ qui, à $\boldsymbol{\tau}\in\mathcal{E}(\tilde{G},\omega)$ et $\tilde{\lambda}\in i\tilde{\mathcal{A}}^*_{\tilde{G},F}$, associe $\boldsymbol{\tau}_{\tilde{\lambda}}$. Il est aussi muni d'une action de $\mathbb{U}$ qui, à $\boldsymbol{\tau}=(M,\sigma,\tilde{\boldsymbol{r}})$ et $z\in\mathbb{U}$, associe $z\boldsymbol{\tau}=(M,\sigma,z\tilde{\boldsymbol{r}})$. Rappelons que l'action de $z\in i\mathbb{R}/2\pi i\mathbb{Z}\in i\tilde{\mathcal{A}}^*_{\tilde{G},F}$ coïncide avec celle de $e^z\in\mathbb{U}$. Notons $\mathcal{E}_{ell}(\tilde{G},\omega)$ l'ensemble des triplets $(M,\sigma,\tilde{\boldsymbol{r}})\in\mathcal{E}(\tilde{G},\omega)$ tels que $(M,\sigma,\tilde{r})\in E_{ell}(\tilde{G},\omega)$, où $\tilde{r}$ est l'image de $\tilde{\boldsymbol{r}}$ dans $R^{\tilde{G}}(\sigma)$. Notons $\mathcal{E}_{ell}(\tilde{G},\omega)/conj$ l'ensemble des classes de conjugaison par $G(F)$ dans $\mathcal{E}_{ell}(\tilde{G},\omega)$. On a une surjection $(\mathcal{E}_{ell}(\tilde{G},\omega)/conj)\to(E_{ell}(\tilde{G},\omega)/conj)$ dont les fibres sont toutes isomorphes à $\mathbb{U}$. Notons $PW_{ell}(\tilde{G},\omega)$ l'espace des fonctions $\varphi:(\mathcal{E}_{ell}(\tilde{G},\omega)/conj)\to\mathbb{C}$ qui vérifient les conditions suivantes :

(1) soient $\boldsymbol{\tau}\in\mathcal{E}_{ell}(\tilde{G},\omega)$ et $z\in\mathbb{U}$ ; alors $\varphi(z\boldsymbol{\tau})=z\varphi(\boldsymbol{\tau})$ (via la projection $\mathcal{E}_{ell}(\tilde{G},\omega)\to(\mathcal{E}_{ell}(\tilde{G},\omega)/conj)$, on a identifié $\varphi$ à une fonction sur $\mathcal{E}_{ell}(\tilde{G},\omega)$) ;

(2) soit $\boldsymbol{\tau}=(M,\sigma,\tilde{\boldsymbol{r}})\in\mathcal{E}_{ell}(\tilde{G},\omega)$ ; alors la fonction $\tilde{\lambda}\mapsto\varphi(\boldsymbol{\tau}_{\tilde{\lambda}})$ est de Paley-Wiener sur $i\tilde{\mathcal{A}}^*_{\tilde{G},F}$ ;

(3) le support de $\varphi$ est contenu dans un nombre fini d'orbites pour l'action de $i\tilde{\mathcal{A}}^*_{\tilde{G},F}$ dans $\mathcal{E}_{ell}(\tilde{G},\omega)/conj$.

Rappelons (cf. 2.12) que l'on note $\mathcal{L}(\tilde{M}_0,\omega)$ l'ensemble des $\tilde{L}\in\mathcal{L}(\tilde{M}_0)$ tels que $\omega$ soit trivial sur $Z_L(F)^\theta$. Soient $\tilde{L}$, $\tilde{L}'$ deux éléments de $\mathcal{L}(\tilde{M}_0,\omega)$ et soit $x\in G(F)$ tel que $x\tilde{L}x^{-1}=\tilde{L}'$. De la conjugaison par $x$ se déduit un isomorphisme $T_{ell}(\tilde{L},\omega)\simeq T_{ell}(\tilde{L}',\omega)$ (cf. 2.12), puis un isomorphisme $PW_{ell}(\tilde{L},\omega)\simeq PW_{ell}(\tilde{L}',\omega)$. Notons que, si $\tilde{L}=\tilde{L}'$ et $x\in L(F)$, cet isomorphisme est l'identité. En particulier, si on note $W^G(\tilde{L})$ le quotient par $L(F)$ du normalisateur de $\tilde{L}$ dans $G(F)$, ce groupe $W^G(\tilde{L})$ agit sur $PW_{ell}(\tilde{L})$. On pose

$$PW(\tilde{G},\omega)=(\oplus_{\tilde{L}\in\mathcal{L}(\tilde{M}_0,\omega)}PW_{ell}(\tilde{L},\omega))^{\tilde{W}^G}$$

$$=\oplus_{\tilde{L}\in\mathcal{L}(\tilde{M}_0,\omega)/\tilde{W}^G}PW_{ell}(\tilde{L},\omega)^{W^G(\tilde{L})},$$

les exposants signifiant selon l'usage que l'on prend les invariants.

**Remarque.** Soient $\tilde{L}\in\mathcal{L}(\tilde{M}_0,\omega)$, $\varphi\in PW_{ell}(\tilde{L},\omega)^{W^G(\tilde{L})}$ et $\boldsymbol{\tau}\in\mathcal{E}_{ell}(\tilde{L},\omega)$. Le triplet $\boldsymbol{\tau}$ est par définition essentiel dans $\tilde{L}$ mais on a déjà dit qu'il ne l'était pas forcément dans $\tilde{G}$. S'il ne l'est pas, il existe $w\in W^G(\tilde{L})$ et $z\in\mathbb{U}$ tels que $w(\boldsymbol{\tau})=z\tau$, et $z\neq 1$ (cf. preuve de la proposition 2.12). Cela entraîne $\varphi(\boldsymbol{\tau})=0$.

Soit $\psi\in\mathcal{PW}(\tilde{G},\omega)$. Pour un espace de Levi $\tilde{L}\in\mathcal{L}(\tilde{M}_0,\omega)$ et un élément $\boldsymbol{\tau}\in\mathcal{E}_{ell}(\tilde{L},\omega)$, rappelons que l'on a défini en 2.9 une $\omega$-représentation $\tilde{\pi}_{\boldsymbol{\tau}}$ de $\tilde{L}(F)$. Fixons un espace parabolique $\tilde{Q}\in\mathcal{P}(\tilde{L})$, posons $\tilde{\Pi}_{\boldsymbol{\tau}}=Ind_{\tilde{Q}}^{\tilde{G}}(\tilde{\pi}_{\boldsymbol{\tau}})$. Cette représentation est tempérée et sa classe d'isomorphisme ne dépend pas de $\tilde{Q}$. Posons $\varphi(\boldsymbol{\tau})=\psi(\tilde{\Pi}_{\boldsymbol{\tau}})$. On a ainsi une fonction $\varphi$ sur $\oplus_{\tilde{L}\in\mathcal{L}(\tilde{M}_0,\omega)}T_{ell}(\tilde{L},\omega)$. Cette fonction appartient à $PW(\tilde{G},\omega)$. En effet, les conditions (1) et (2) résultent de 6.1(1) tandis que la condition (3) résulte de 6.1(2) et (3). La condition d'invariance par $\tilde{W}^G$ résulte de l'égalité $\tilde{\Pi}_{w(\boldsymbol{\tau})}=\tilde{\Pi}_{\boldsymbol{\tau}}$ pour tout $w\in\tilde{W}^G$. Notons

$$res:\mathcal{PW}(\tilde{G},\omega)\to PW(\tilde{G},\omega)$$

l'application $\psi \mapsto \varphi$ et

$$pw_{\tilde{G}} : C_c^\infty(\tilde{G}(F), K) \to PW(\tilde{G}, \omega)$$

la composée $pw_{\tilde{G}} = res \circ \underline{pw}_{\tilde{G}}$.

**Théorème**. *L'application $pw_{\tilde{G}}$ se quotiente en un isomorphisme de $I(\tilde{G}(F), K, \omega)$ sur $PW(\tilde{G}, \omega)$.*

Preuve. L'énoncé résulte du théorème 6.1 pouvu que $res$ soit bijectif. Cette bijectivité résulte aisément de la proposition 2.12. □

Le théorème admet un complément similaire à celui du théorème 6.1.

## 6.3 Extension du théorème de Delorme et Mezo au cas $\omega \neq 1$

Dans ce paragraphe, on suppose $F = \mathbb{R}$. On veut prouver

(1) l'application $\underline{pw}_{\tilde{G}}$ a pour image $\mathcal{PW}(\tilde{G}, \omega)$.

Delorme et Mezo ont prouvé l'assertion pour $\omega = \mathbf{1}$, où $\mathbf{1}$ désigne le caractère trivial de $G(\mathbb{R})$. Supposons d'abord qu'il existe un caractère unitaire $\mu$ de $G(\mathbb{R})$ tel que $\omega = \mu \circ (1 - \theta)$, cf. 2.4. Fixons un élément $\gamma_0 \in \tilde{G}(\mathbb{R})$. Comme dans la preuve de 2.5(2), on associe à toute $\omega$-représentation $\tilde{\pi}$ de $\tilde{G}(\mathbb{R})$ une $\mathbf{1}$-représentation $\tilde{\pi}_1$ définie par $\tilde{\pi}_1(g\gamma_0) = \mu(g)\tilde{\pi}(\gamma_0)$ pour tout $g \in G(\mathbb{R})$. L'application $\tilde{\pi} \mapsto \tilde{\pi}_1$ est bijective. Pour plus de précision, on ajoute des indices $\omega$ à certains objets définis en 6.1, par exemple $\mathcal{F}_\omega$ et $\underline{pw}_{\tilde{G},\omega}$. On définit une application

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{F}_\omega & \to & \mathcal{F}_{\mathbf{1}} \\ \varphi & \mapsto & \varphi_1 \end{array}$$

par $\varphi_1(\tilde{\pi}_1) = \varphi(\tilde{\pi})$. On définit une application

$$\begin{array}{ccc} C_c^\infty(\tilde{G}(\mathbb{R}), K) & \to & C_c^\infty(\tilde{G}(\mathbb{R}), K) \\ f & \mapsto & f_1 \end{array}$$

par $f_1(g\gamma_0) = \mu(g)^{-1} f(g\gamma_0)$ pour tout $g \in G(\mathbb{R})$. Il est clair que $I_{\tilde{G}}(\tilde{\pi}_1, f_1) = I_{\tilde{G}}(\tilde{\pi}, f)$ pour tous $f$, $\tilde{\pi}$. Donc le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{array}{ccc} C_c^\infty(\tilde{G}(\mathbb{R}), K) & \stackrel{f \mapsto f_1}{\to} & C_c^\infty(\tilde{G}(\mathbb{R}), K) \\ \downarrow \underline{pw}_{\tilde{G},\omega} & & \downarrow \underline{pw}_{\tilde{G},\mathbf{1}} \\ \mathcal{F}_\omega & \stackrel{\varphi \mapsto \varphi_1}{\to} & \mathcal{F}_{\mathbf{1}}. \end{array}$$

L'application horizontale du haut est bijective. On vérifie immédiatement que celle du bas se restreint en un isomorphisme de $\mathcal{PW}(\tilde{G}, \omega)$ sur $\mathcal{PW}(\tilde{G}, \mathbf{1})$. Alors l'assertion (1) se déduit de la même assertion pour le caractère $\mathbf{1}$.

Dans le cas général, on introduit des objets $G'$, $\tilde{G}'$, $C$, $p$, $\tilde{p}$ vérifiant la proposition 2.4. On pose $\omega' = \omega \circ p$. Ces termes vérifient l'hypothèse précédente : il existe un caractère $\mu'$ de $G'(\mathbb{R})$ tel que $\omega' = \mu' \circ (1 - \theta')$. On note $K'$ l'unique sous-groupe compact maximal de $G'(\mathbb{R})$ contenu dans $p^{-1}(K)$. Pour une $\omega$-représentation $\tilde{\pi}$ de $\tilde{G}(\mathbb{R})$, on note $\tilde{\pi}'$ la $\omega'$-représentation $\tilde{\pi} \circ \tilde{p}$ de $\tilde{G}'(\mathbb{R})$. Dualement, on en déduit une application

$$(2) \qquad \begin{array}{ccc} \mathcal{F}_{\tilde{G}',\omega'} & \to & \mathcal{F}_{\tilde{G},\omega} \\ \varphi' & \mapsto & \varphi \end{array}$$

par $\varphi(\tilde{\pi}) = \varphi'(\tilde{\pi}')$ (on a ajouté des indices $\tilde{G}$ et $\tilde{G}'$ aux notations précédentes). On définit aussi une application

$$\begin{array}{ccc} C_c^\infty(\tilde{G}'(\mathbb{R}), K') & \to & C_c^\infty(\tilde{G}(\mathbb{R}), K) \\ f' & \mapsto & f \end{array}$$

par

$$f(\gamma) = \int_{C(\mathbb{R})} f'(c\gamma')\, dc,$$

pour tout $\gamma \in \tilde{G}(\mathbb{R})$, où $\gamma'$ est un relèvement quelconque de $\gamma$ dans $\tilde{G}'(\mathbb{R})$. La mesure sur $C(F)$ doit être compatible aux mesures choisies sur $G(\mathbb{R})$ et $G'(\mathbb{R})$. On vérifie que le diagramme suivant est commutatif

$$\begin{array}{ccc} C_c^\infty(\tilde{G}'(\mathbb{R}), K') & \stackrel{f'\mapsto f}{\to} & C_c^\infty(\tilde{G}(\mathbb{R}), K) \\ \downarrow \underline{pw}_{\tilde{G}',\omega'} & & \downarrow \underline{pw}_{\tilde{G},\omega} \\ \mathcal{F}_{\tilde{G}',\omega'} & \stackrel{\varphi'\mapsto\varphi}{\to} & \mathcal{F}_{\tilde{G},\omega}. \end{array}$$

L'application horizontale du haut est surjective. Puisque l'application $\underline{pw}_{\tilde{G}',\omega'}$ vérifie (1) d'après le cas déjà traité, il nous suffit pour conclure de montrer que l'application (2) se restreint en une surjection de $\mathcal{PW}(\tilde{G}',\omega')$ sur $\mathcal{PW}(\tilde{G},\omega)$. Que l'image de $\mathcal{PW}(\tilde{G}',\omega')$ par l'application (2) soit contenue dans $\mathcal{PW}(\tilde{G},\omega)$ résulte aisément du fait suivant. Soit $\tilde{Q} = \tilde{L}U_Q$ un espace parabolique de $\tilde{G}$, notons $\tilde{Q}' = \tilde{L}'U_{Q'}$ son image réciproque dans $\tilde{G}'$. L'espace $i\tilde{\mathcal{A}}_{\tilde{L}}^*$ s'injecte naturellement dans $i\tilde{\mathcal{A}}_{\tilde{L}'}^*$ et la restriction à ce sous-espace d'une fonction de Paley-Wiener sur $i\tilde{\mathcal{A}}_{\tilde{L}'}^*$ est encore de Paley-Wiener. Pour démontrer la surjectivité, on va construire une section $s$ de l'application (2) et montrer que $s$ envoie $\mathcal{PW}(\tilde{G},\omega)$ dans $\mathcal{PW}(\tilde{G}',\omega')$. On a une suite exacte naturelle

$$0 \to i\tilde{\mathcal{A}}_{\tilde{G}}^* \to i\tilde{\mathcal{A}}_{\tilde{G}'}^* \to i\mathcal{A}_C^* \to 0.$$

En choisissant une section de la dernière application, on identifie $i\mathcal{A}_C^*$ à un supplémentaire de $i\tilde{\mathcal{A}}_{\tilde{G}}^*$ dans $i\tilde{\mathcal{A}}_{\tilde{G}'}^*$. On fixe une fonction $\varphi_C$ de Paley-Wiener sur $i\mathcal{A}_C^*$ telle que $\varphi_C(0) = 1$. Soit $\varphi \in \mathcal{F}_{\tilde{G},\omega}$. Pour une $\omega'$-représentation $\tilde{\pi}'$ de $\tilde{G}'(\mathbb{R})$, tempérée et $G'$-irréductible, ou bien il n'existe aucun $\tilde{\xi} \in i\mathcal{A}_C^*$ tel que $\tilde{\pi}'_{\tilde{\xi}}$ se factorise par $\tilde{p}$. On pose alors $(s(\varphi))(\tilde{\pi}') = 0$. Ou bien il existe un unique $\tilde{\xi} \in i\mathcal{A}_C^*$ tel que $\tilde{\pi}'_{\tilde{\xi}}$ se factorise par $\tilde{p}$. Pour ce $\tilde{\xi}$, on note $\tilde{\pi}$ la $\omega$-représentation de $\tilde{G}(\mathbb{R})$ telle que $\tilde{\pi}'_{\tilde{\xi}} = \tilde{\pi} \circ \tilde{p}$ et on pose alors $(s(\varphi))(\tilde{\pi}') = \varphi_C(\tilde{\xi})\varphi(\tilde{\pi})$. La fonction $s(\varphi)$ ainsi définie appartient à $\mathcal{F}_{\tilde{G}',\omega'}$. Cela définit une application $s : \mathcal{F}_{\tilde{G},\omega} \to \mathcal{F}_{\tilde{G}',\omega'}$ qui est clairement une section de l'application (2). On doit montrer que, si $\varphi \in \mathcal{PW}(\tilde{G},\omega)$, alors $s(\varphi) \in \mathcal{PW}(\tilde{G}',\omega')$. La condition 6.1(3) est immédiate. Soient $\tilde{Q}' = \tilde{L}'U_{Q'}$ un espace parabolique et $\tilde{\sigma}'$ une $\omega'$-représentation tempérée et $L'$-irréductible de $\tilde{L}'(F)$. Posons $\tilde{Q} = \tilde{p}(\tilde{Q}')$, $\tilde{L} = \tilde{p}(\tilde{L}')$. Supposons d'abord que, pour tout $\tilde{\lambda}' \in i\tilde{\mathcal{A}}_{\tilde{L}'}^*$ et pour toute composante $G'$-irréductible $\tilde{\pi}'$ de $Ind_{\tilde{Q}'}^{\tilde{G}'}(\tilde{\sigma}'_{\tilde{\lambda}'})$, il n'existe pas de $\tilde{\xi} \in i\mathcal{A}_C^*$ tel que $\tilde{\pi}'_{\tilde{\xi}}$ se factorise par $\tilde{p}$. Alors par définition $(s(\varphi))(Ind_{\tilde{Q}'}^{\tilde{G}'}(\tilde{\sigma}'_{\tilde{\lambda}'})) = 0$ pour tout $\tilde{\lambda}'$ et cette fonction de $\tilde{\lambda}'$ est bien de Paley-Wiener. Supposons au contraire qu'il existe $\tilde{\lambda}'$, $\tilde{\pi}'$ et $\tilde{\xi}$ comme ci-dessus tel que $\tilde{\pi}'_{\tilde{\xi}}$ se factorise par $\tilde{p}$. Fixons de tels objets. Quitte à remplacer $\tilde{\sigma}'$ par $\tilde{\sigma}'_{\tilde{\lambda}'+\tilde{\xi}}$, on peut supposer que $\tilde{\pi}'$ est une composante de $Ind_{\tilde{Q}'}^{\tilde{G}'}(\tilde{\sigma}')$ et qu'elle se factorise par $\tilde{p}$. Cette condition équivaut à ce que le caractère central de la représentation sous-jacente $\pi'$ se restreigne en le caractère trivial de $C(\mathbb{R})$. Mais cette restriction est la même que celle du caractère central de $\sigma'$. Donc $\tilde{\sigma}'$ se factorise en une $\omega$-représentation $\tilde{\sigma}$ de $\tilde{L}(\mathbb{R})$. Cela oblige $\omega$ à être trivial sur $Z_L(\mathbb{R})^\theta$. On a encore l'égalité

$$i\tilde{\mathcal{A}}^*_{\tilde{L}'} = i\tilde{\mathcal{A}}^*_{\tilde{L}} \oplus i\mathcal{A}^*_C.$$

Les constructions entraînent que, pour tout $\tilde{\lambda}' \in i\tilde{\mathcal{A}}^*_{\tilde{L}'}$, on a l'égalité

$$(s(\varphi))(Ind_{\tilde{Q}'}^{\tilde{G}'}(\tilde{\sigma}'_{\tilde{\lambda}'})) = \varphi_C(\tilde{\xi})\varphi(Ind_{\tilde{Q}}^{\tilde{G}}(\tilde{\sigma}_{\tilde{\lambda}})),$$

où $\tilde{\lambda}$ et $\tilde{\xi}$ sont les composantes de $\tilde{\lambda}'$ selon la décomposition ci-dessus. La fonction de $\tilde{\lambda}'$ ci-dessus est de Paley-Wiener. Cela achève la preuve. $\square$

## 6.4 L'application $\phi_{\tilde{M}}$

On note $\mathcal{H}_{ac}(\tilde{G}(F))$ l'espace des fonctions $f : \tilde{G}(F) \to \mathbb{C}$ qui vérifient les conditions suivantes :

(1) si $F$ est non-archimédien, il existe un sous-groupe ouvert compact $H$ de $G(F)$ tel que $f$ soit biinvariante par $H$ ;

(2) si $F$ est archimédien, il existe un ensemble fini $\underline{\kappa}$ de représentations irréductibles de $K$ tel que la représentation de $K \times K$ dans l'espace engendré par les translatés de $f$ à droite et à gauche par des éléments de $K$ n'ait pour composantes irréductibles que des éléments de $\underline{\kappa} \times \underline{\kappa}$ ;

(3) pour toute fonction $b \in C_c^\infty(\tilde{\mathcal{A}}_{\tilde{G},F})$, la fonction produit $f(b \circ \tilde{H}_{\tilde{G}})$ appartient à $C_c^\infty(\tilde{G}(F))$.

Remarquons que toute forme linéaire sur $C_c^\infty(\tilde{G}(F), K)$ dont le support a une projection compacte dans $\tilde{\mathcal{A}}_{\tilde{G},F}$ s'étend à $\mathcal{H}_{ac}(\tilde{G}(F))$ : pour une telle forme linéaire $l$ et pour $f \in \mathcal{H}_{ac}(\tilde{G}(F))$, on pose $l(f) = l(f(b \circ \tilde{H}_{\tilde{G}}))$, où $b$ est un élément de $C_c^\infty(\tilde{\mathcal{A}}_{\tilde{G},F})$ qui vaut 1 sur un voisinage de cette projection. En particulier, les intégrales orbitales ou les intégrales orbitales pondérées sont définies sur $\mathcal{H}_{ac}(\tilde{G}(F))$. On note $I_{ac}(\tilde{G}(F), \omega)$ le quotient de $\mathcal{H}_{ac}(\tilde{G}(F))$ par le sous-espace des $f \in \mathcal{H}_{ac}(\tilde{G}(F))$ telles que $I_{\tilde{G}}(\gamma, \omega, f) = 0$ pour tout $\gamma \in \tilde{G}_{reg}(F)$.

Les caractères de $\omega$-représentations admissibles ne s'étendent pas à l'espace $\mathcal{H}_{ac}(\tilde{G}(F))$ mais nous allons voir que leurs coefficients de Fourier s'y étendent. Précisément, soit $\tilde{\pi}$ une $\omega$-représentation admissible de $\tilde{G}(F)$, soit $f \in C_c^\infty(\tilde{G}(F), K)$ et soit $X \in \tilde{\mathcal{A}}_{\tilde{G},F}$. Pour $\tilde{\lambda} \in i\tilde{\mathcal{A}}^*_{\tilde{G},F}$, on définit $\tilde{\pi}_{\tilde{\lambda}}$ comme en 2.6. La fonction $\tilde{\lambda} \mapsto I_{\tilde{G}}(\tilde{\pi}_{\tilde{\lambda}}, f)e^{-<\tilde{\lambda}, X>}$ se descend en une fonction sur $i\mathcal{A}^*_{\tilde{G},F}$. Cette fonction est $C^\infty$, à décroissance rapide si $F$ est archimédien. Posons

$$I_{\tilde{G}}(\tilde{\pi}, X, f) = mes(i\mathcal{A}^*_{\tilde{G},F})^{-1} \int_{i\mathcal{A}^*_{\tilde{G},F}} I_{\tilde{G}}(\tilde{\pi}_{\tilde{\lambda}}, f)e^{-<\tilde{\lambda}, X>}\, d\lambda.$$

On a

(4) la fonction $X \mapsto I_{\tilde{G}}(\tilde{\pi}, X, f)$ est à support compact et est $C^\infty$ dans le cas où $F$ est archimédien ; son support est contenu dans la projection dans $\tilde{A}_{\tilde{G},F}$ de celui de $f$ ; plus précisément, pour une fonction lisse $b$ sur $\tilde{\mathcal{A}}_{\tilde{G},F}$, on a l'égalité $I_{\tilde{G}}(\tilde{\pi}, X, f(b \circ \tilde{H}_{\tilde{G}})) = b(X)I_{\tilde{G}}(\tilde{\pi}, X, f)$.

Preuve. Par $K$-finitude, $I_{\tilde{G}}(\tilde{\pi}_{\tilde{\lambda}}, f)$ est de la forme

$$\sum_{i=1,\dots,n} < \check{v}_i, \tilde{\pi}_{\tilde{\lambda}}(f)v_i >,$$

pour des éléments $v_i \in V_\pi$ et $\check{v}_i \in V_{\pi^\vee}$. Autrement dit

$$I_{\tilde{G}}(\tilde{\pi}_{\tilde{\lambda}}, f) = \int_{\tilde{G}(F)} B(\tilde{\lambda}, \gamma) f(\gamma)\, d\gamma,$$

où

$$B(\tilde{\lambda}, \gamma) = \sum_{i=1,\dots,n} < \check{v}_i, \tilde{\pi}_{\tilde{\lambda}}(\gamma)v_i > .$$

L'espace topologique $\tilde{G}(F)$ est un fibré au-dessus de $\tilde{\mathcal{A}}_{\tilde{G},F}$, de fibres isomorphes à $G(F)^1$ (le noyau de $H_{\tilde{G}}$). Pour tout $Y \in \tilde{\mathcal{A}}_{\tilde{G},F}$, notons $\tilde{G}(F;Y)$ la fibre au-dessus de $Y$. Les résultats habituels de décomposition d'intégrales sur des fibrés nous disent que l'on peut définir une intégrale

$$I'_{\tilde{G}}(\tilde{\pi}_{\tilde{\lambda}}, Y, f) = \int_{\tilde{G}(F;Y)} B(\tilde{\lambda}, \gamma) f(\gamma)\, d\gamma$$

qui est à support compact en $Y$ et $C^\infty$ si $F$ est archimédien, de sorte que

$$I_{\tilde{G}}(\tilde{\pi}_{\tilde{\lambda}}, f) = \int_{\tilde{\mathcal{A}}_{\tilde{G},F}} I'_{\tilde{G}}(\tilde{\pi}_{\tilde{\lambda}}, Y, f)\, dY.$$

Mais

$$I'_{\tilde{G}}(\tilde{\pi}_{\tilde{\lambda}}, Y, f) = e^{<\tilde{\lambda}, Y>} I'_{\tilde{G}}(\tilde{\pi}, Y, f).$$

Par inversion de Fourier, on en déduit l'égalité $I_{\tilde{G}}(\tilde{\pi}, X, f) = I'_{\tilde{G}}(\tilde{\pi}, X, f)$ et l'assertion (4) s'ensuit. $\square$

Il résulte de (4) que l'on peut définir $I_{\tilde{G}}(\tilde{\pi}, X, f)$ pour $f \in \mathcal{H}_{ac}(\tilde{G}(F))$. Le théorème 5.5 s'étend :

(5) un élément $f \in \mathcal{H}_{ac}(\tilde{G}(F))$ a une image nulle dans $I_{ac}(\tilde{G}(F), \omega)$ si et seulement si $I_{\tilde{G}}(\tilde{\pi}, X, f) = 0$ pour toute $\omega$-représentation irréductible et tempérée $\tilde{\pi}$ de $\tilde{G}(F)$ et tout $X \in \tilde{\mathcal{A}}_{\tilde{G},F}$.

Plus généralement, soit $\tilde{M} \in \mathcal{L}(\tilde{M}_0)$, soit $\tilde{\pi}$ une $\omega$-représentation tempérée de longueur finie de $\tilde{M}(F)$ et soit $X \in \tilde{\mathcal{A}}_{\tilde{M},F}$. Pour $f \in C_c^\infty(\tilde{G}(F), K)$ et $\tilde{\lambda} \in i\tilde{\mathcal{A}}^*_{\tilde{M},F}$, on définit $J^{\tilde{G}}_{\tilde{M}}(\tilde{\pi}_{\tilde{\lambda}}, f)$. La fonction $\tilde{\lambda} \mapsto J^{\tilde{G}}_{\tilde{M}}(\tilde{\pi}_{\tilde{\lambda}}, f)e^{-<\tilde{\lambda}, X>}$ se descend en une fonction sur $i\mathcal{A}^*_{\tilde{M},F}$. Cette fonction est $C^\infty$, à décroissance rapide si $F$ est archimédien. Posons

$$J^{\tilde{G}}_{\tilde{M}}(\tilde{\pi}, X, f) = mes(i\mathcal{A}^*_{\tilde{M},F})^{-1} \int_{i\mathcal{A}^*_{\tilde{M},F}} J^{\tilde{G}}_{\tilde{M}}(\tilde{\pi}_{\tilde{\lambda}}, f) e^{-<\tilde{\lambda}, X>}\, d\lambda.$$

Comme fonction de $X$, ce terme n'est pas à support compact dans $\tilde{\mathcal{A}}_{\tilde{M},F}$. Toutefois

(6) la fonction $X \mapsto J^{\tilde{G}}_{\tilde{M}}(\tilde{\pi}, X, f)$ est de Schwartz ; la projection dans $\tilde{\mathcal{A}}_{\tilde{G},F}$ de son support est contenue dans celle du support de $f$ ; plus précisément, pour une fonction lisse $b$ sur $\tilde{\mathcal{A}}_{\tilde{G},F}$, on a l'égalité $J^{\tilde{G}}_{\tilde{M}}(\tilde{\pi}, X, f(b \circ \tilde{H}_{\tilde{G}})) = b(X_{\tilde{G}}) J^{\tilde{G}}_{\tilde{M}}(\tilde{\pi}, X, f)$, où $X_{\tilde{G}}$ est l'image naturelle de $X$ dans $\tilde{\mathcal{A}}_{\tilde{G},F}$.

Preuve. La fonction est de Schwartz car c'est la transformée de Fourier d'une fonction de Schwartz. La preuve de la deuxième assertion est la même que celle de (4), la fonction $B(\tilde{\lambda},\gamma)$ ayant maintenant la forme

$$B(\tilde{\lambda},\gamma)=\sum_{i=1,\dots,n}<\check{v}_i,\mathcal{M}_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(\pi_\lambda)\tilde{\Pi}_{\tilde{\lambda}}(\gamma)v_i>,$$

où $\tilde{\Pi}_{\tilde{\lambda}}=Ind_{\tilde{P}}^{\tilde{G}}(\tilde{\pi}_{\tilde{\lambda}})$, cf. 2.7 pour les notations. $\square$

Il résulte de (6) que l'on peut définir $J_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(\tilde{\pi},X,f)$ pour $f\in\mathcal{H}_{ac}(\tilde{G}(F))$.

**Proposition**. *Soit $\tilde{M}\in\mathcal{L}(\tilde{M}_0,\omega)$. Pour tout $f\in\mathcal{H}_{ac}(\tilde{G}(F))$, il existe $\phi_{\tilde{M}}(f)\in\mathcal{H}_{ac}(\tilde{M}(F))$ telle que, pour toute $\omega$-représentation tempérée et de longueur finie $\tilde{\pi}$ de $\tilde{M}(F)$ et pour tout $X\in\tilde{\mathcal{A}}_{\tilde{M},F}$, on ait l'égalité*

$$I_{\tilde{M}}(\tilde{\pi},X,\phi_{\tilde{M}}(f))=J_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(\tilde{\pi},X,f).$$

*L'image de $\phi_{\tilde{M}}(f)$ dans $I_{ac}(\tilde{M}(F),\omega)$ est uniquement déterminée.*

Preuve. Soient $f\in C_c^\infty(\tilde{G}(F),K)$ et $b\in C_c^\infty(\tilde{\mathcal{A}}_{\tilde{M},F})$. Pour une $\omega$-représentation tempérée et de longueur finie $\tilde{\pi}$ de $\tilde{M}(F)$, posons

$$\varphi_{f,b}(\tilde{\pi})=\int_{\tilde{\mathcal{A}}_{\tilde{M},F}}J_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(\tilde{\pi},X,f)\overline{b(X)}\,dX.$$

Ceci est convergent d'après (6). Par transformation de Fourier, on a l'égalité

$$\varphi_{f,b}(\tilde{\pi})=mes(i\mathcal{A}_{\tilde{M},F}^*)^{-1}\int_{i\mathcal{A}_{\tilde{M},F}^*}J_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(\tilde{\pi}_{\tilde{\lambda}},f)\overline{\hat{b}(\tilde{\lambda})}\,d\lambda,$$

où

$$\hat{b}(\tilde{\lambda})=\int_{\tilde{\mathcal{A}}_{\tilde{M},F}}b(X)e^{<\tilde{\lambda},X>}\,dX.$$

On va montrer

(7) la fonction $\varphi_{f,b}$ appartient à l'espace $\mathcal{PW}(\tilde{M},\omega)$.

D'après 2.7(1), la fonction s'identifie bien à une fonction sur le groupe de Grothendieck $\mathcal{K}^{\tilde{M}}$ de 6.1. D'après 2.7(2), elle annule les représentations irréductibles et non $M$-irréductibles. Les conditions (2) et (3) de 6.1 sont évidentes puisque $f$ est $K$-finie. Il faut vérifier 6.1(1). D'après la bijectivité de l'application $res$ de 6.2, il suffit de vérifier l'assertion suivante :

(8) soit $\tilde{Q}=\tilde{L}U_Q\in\mathcal{F}^{\tilde{M}}(\tilde{M}_0)$ et soit $\boldsymbol{\tau}\in\mathcal{E}_{ell}(\tilde{L},\omega)$ ; alors la fonction $\tilde{\mu}\mapsto\varphi_{f,b}(Ind_{\tilde{Q}}^{\tilde{M}}(\tilde{\pi}_{\boldsymbol{\tau}_{\tilde{\mu}}}))$ sur $i\tilde{\mathcal{A}}_{\tilde{L},F}^*$ est de Paley-Wiener.

Posons simplement $\tilde{\pi}=\tilde{\pi}_{\boldsymbol{\tau}}$. Remarquons que, pour $\tilde{\lambda}\in i\tilde{\mathcal{A}}_{\tilde{M},F}^*$, on a l'égalité $(Ind_{\tilde{Q}}^{\tilde{M}}(\tilde{\pi}_{\boldsymbol{\tau}_{\tilde{\mu}}}))_{\tilde{\lambda}}=Ind_{\tilde{Q}}^{\tilde{M}}(\tilde{\pi}_{\tilde{\mu}+\tilde{\lambda}})$. On utilise la formule de descente du lemme 5.4(iv) (où les rôles de $\tilde{M}$ et $\tilde{L}$ sont échangés). C'est-à-dire

$$J_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}((Ind_{\tilde{Q}}^{\tilde{M}}(\tilde{\pi}_{\tilde{\mu}+\tilde{\lambda}}),f)=\sum_{\tilde{M}'\in\mathcal{L}(\tilde{L})}d_{\tilde{L}}^{\tilde{G}}(\tilde{M},\tilde{M}')J_{\tilde{L}}^{\tilde{M}'}(\tilde{\pi}_{\tilde{\mu}+\tilde{\lambda}},f_{\tilde{P}'}).$$

On peut fixer $\tilde{M}' \in \mathcal{L}(\tilde{L})$ tel que $d_{\tilde{L}}^{\tilde{G}}(\tilde{M}, \tilde{M}') \neq 0$ et prouver que la fonction $\psi$ sur $i\tilde{\mathcal{A}}_{\tilde{L},F}^*$ définie par

$$\psi(\tilde{\mu}) = mes(i\mathcal{A}_{\tilde{M},F}^*)^{-1} \int_{i\mathcal{A}_{\tilde{M},F}^*} J_{\tilde{L}}^{\tilde{M}'}(\tilde{\pi}_{\tilde{\mu}+\tilde{\lambda}}, f_{\tilde{P}'})\overline{\hat{b}(\tilde{\lambda})}\, d\lambda$$

est de Paley-Wiener. Grâce à (6), on peut exprimer $J_{\tilde{L}}^{\tilde{M}'}(\tilde{\pi}_{\tilde{\mu}+\tilde{\lambda}}, f_{\tilde{P}'})$ par inversion de Fourier :

$$J_{\tilde{L}}^{\tilde{M}'}(\tilde{\pi}_{\tilde{\mu}+\tilde{\lambda}}, f_{\tilde{P}'}) = \int_{\tilde{\mathcal{A}}_{\tilde{L},F}} J_{\tilde{L}}^{\tilde{M}'}(\tilde{\pi}, Y, f_{\tilde{P}'})e^{<\tilde{\mu}+\tilde{\lambda},Y>}\, dY.$$

D'où

$$\psi(\tilde{\mu}) = mes(i\mathcal{A}_{\tilde{M},F}^*)^{-1} \int_{i\mathcal{A}_{\tilde{M},F}^*} \int_{\tilde{\mathcal{A}}_{\tilde{L},F}} J_{\tilde{L}}^{\tilde{M}'}(\tilde{\pi}, Y, f_{\tilde{P}'})e^{<\tilde{\mu}+\tilde{\lambda},Y>}\overline{\hat{b}(\tilde{\lambda})}\, dY\, d\lambda.$$

Cette expression est absolument convergente. En intégrant d'abord en $\lambda$, on obtient par inversion de Fourier

$$\psi(\tilde{\mu}) = \int_{\tilde{\mathcal{A}}_{\tilde{L},F}} \Psi(Y)e^{<\tilde{\mu},Y>}\, dY,$$

où, en notant $Y_{\tilde{M}}$ la projection naturelle de $Y$ dans $\tilde{\mathcal{A}}_{\tilde{M},F}$,

$$\Psi(Y) = J_{\tilde{L}}^{\tilde{M}'}(\tilde{\pi}, Y, f^{\tilde{P}'})\bar{b}(Y_{\tilde{M}}).$$

Ainsi, $\psi$ apparaît comme la transformée de Fourier de la fonction $\Psi$ sur $\tilde{\mathcal{A}}_{\tilde{L},F}$. Il s'agit de prouver que $\Psi$ est lisse et à support compact. Elle est lisse car c'est le produit de deux fonctions lisses. L'hypothèse sur $\tilde{M}'$ implique que

$$\mathcal{A}_{\tilde{L}}^{\tilde{M}} \cap \mathcal{A}_{\tilde{L}}^{\tilde{M}'} = 0,$$

donc que la somme directe des projections

$$\mathcal{A}_{\tilde{L},F} \to \mathcal{A}_{\tilde{M},F} \oplus \mathcal{A}_{\tilde{M}',F}$$

est injective. La réplique pour les espaces affines est que le produit des projections

$$\tilde{\mathcal{A}}_{\tilde{L},F} \to \tilde{\mathcal{A}}_{\tilde{M},F} \times \tilde{\mathcal{A}}_{\tilde{M}',F}$$

est injectif. Il est clair que c'est une immersion fermée. La projection dans $\tilde{\mathcal{A}}_{\tilde{M}',F}$ du support de la fonction $Y \mapsto J_{\tilde{L}}^{\tilde{M}'}(\tilde{\pi}, Y, f_{\tilde{P}'})$ est compacte d'après (6). La projection dans $\tilde{\mathcal{A}}_{\tilde{M},F}$ du support de la fonction $Y \mapsto \bar{b}(Y_{\tilde{M}})$ est compacte puisque $b$ est à support compact. Donc $\Psi$ est à support compact. Cela démontre (8) et achève la preuve de (7).

D'après le théorème 6.1, on peut choisir une fonction $\phi_{\tilde{M}}(f,b) \in C_c^\infty(\tilde{M}(F), K^M)$ (où $K^M = K \cap M(F)$) de sorte que $I_{\tilde{M}}(\tilde{\pi}, \phi_{\tilde{M}}(f,b)) = \varphi_{f,b}(\tilde{\pi})$ pour toute $\omega$-représentation tempérée et de longueur finie $\tilde{\pi}$ de $\tilde{M}(F)$. On peut préciser le comportement de $\phi_{\tilde{M}}(f,b)$ par translations à droite ou à gauche par $K$. Traitons le cas non-archimédien (le cas archimédien n'en diffère que par les notations). Fixons un sous-groupe ouvert compact $H$ de $G(F)$ tel que $f$ soit biinvariante par $H$. Il existe un tel sous-groupe $H'$ de $M(F)$, ne dépendant que de $H$, tel que $J_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(\tilde{\pi}, f) = 0$ si $\pi$ n'a pas d'invariant non nul par $H'$. A fortiori, dans ce cas, $\varphi_{f,b}(\tilde{\pi}) = 0$ pour tout $b$. D'après le complément au théorème 6.1, on peut fixer un sous-groupe ouvert compact $H^M$ de $M(F)$, ne dépendant que de $H'$, donc ne dépendant que de $H$, et supposer que $\phi_{\tilde{M}}(f,b)$ est biinvariante par $H^M$.

Remarquons que la fonction $\tilde\lambda\mapsto\varphi(\tilde\pi_{\tilde\lambda})$ sur $i\tilde{\mathcal{A}}^*_{\tilde M,F}$ est par construction la transformée de Fourier de la fonction $X\mapsto J_{\tilde M}(\tilde\pi,X,f)\bar b(X)$ sur $\tilde{\mathcal{A}}_{\tilde M,F}$. Par transformation de Fourier, l'égalité $I_{\tilde M}(\tilde\pi,\phi_{\tilde M}(f,b))=\varphi_{f,b}(\tilde\pi)$ est donc équivalente à

$$(9)\qquad I_{\tilde M}(\tilde\pi,X,\phi_{\tilde M}(f,b))=J^{\tilde G}_{\tilde M}(\tilde\pi,X,f)\bar b(X)$$

pour tout $\tilde\pi$ et tout $X\in\tilde{\mathcal{A}}_{\tilde M,F}$.

Fixons une suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de sous-ensembles ouverts relativement compacts de $\tilde{\mathcal{A}}_{\tilde M,F}$ de sorte que $\bar U_n\subset U_{n+1}$ (où $\bar U_n$ est la clôture de $U_n$) et que $\tilde{\mathcal{A}}_{\tilde M,F}=\cup_{n\in\mathbb{N}}U_n$. En posant $U'_n=U_n-\bar U_{n-2}$ pour $n\geq 2$ et $U'_1=U_1$, on a aussi $\tilde{\mathcal{A}}_{\tilde M,F}=\cup_{n\geq1}U'_n$. On peut choisir une partition de l'unité $(b_n)_{n\geq1}$ relative à ce dernier recouvrement, formée de fonctions lisses (et forcément à supports compacts). On choisit une suite $(c_n)_{n\geq1}$ de fonctions lisses à supports compacts sur $\tilde{\mathcal{A}}_{\tilde M,F}$ de sorte que $c_n$ vaille 1 sur $U'_n$ et, pour $n\geq3$, le support de $c_n$ soit contenu dans $U_{n+1}-\bar U_{n-3}$. On choisit enfin une suite $(d_n)_{n\geq1}$ de fonctions lisses à supports compacts sur $\tilde{\mathcal{A}}_{\tilde G,F}$ de sorte que $d_n$ vaille 1 sur un voisinage de la projection de $U'_n$ dans $\tilde{\mathcal{A}}_{\tilde G,F}$. Soit $f\in\mathcal{H}_{ac}(\tilde G(F))$. Pour tout $n\geq1$, la fonction $f(d_n\circ\tilde H_{\tilde G})$ est à support compact, on dispose donc de $\phi_{\tilde M}(f(d_n\circ\tilde H_{\tilde G}),b_n)$. Posons

$$\phi_{\tilde M}(f)=\sum_{n\geq1}(c_n\circ\tilde H_{\tilde M})\phi_{\tilde M}(f(d_n\circ\tilde H_{\tilde G}),b_n).$$

Cette série est convergente : elle est localement finie d'après les propriétés de la suite $(c_n)_{n\geq1}$. Pour la même raison, si $b\in C_c^\infty(\tilde{\mathcal{A}}_{\tilde M,F})$, la fonction $\phi_{\tilde M}(f)(b\circ\tilde H_{\tilde M})$ est à support compact. Enfin, $\phi_{\tilde M}(f)$ vérifie les propriétés (1) ou (2). Par exemple, dans le cas non-archimédien, fixons un sous-groupe ouvert compact $H$ de $G(F)$ tel que $f$ soit biinvariante par $H$. Chaque fonction $f(d_n\circ\tilde H_{\tilde G})$ vérifie la même propriété. Comme on l'a dit ci-dessus, on peut supposer $\phi_{\tilde M}(f(d_n\circ\tilde H_{\tilde G}),b_n)$ biinvariante par $H^M$, où $H^M$ est indépendant de $n$. Alors $\phi_{\tilde M}(f)$ est aussi biinvariante par $H^M$. Cela prouve que $\phi_{\tilde M}(f)$ appartient à $\mathcal{H}_{ac}(\tilde M)$. Soit $\tilde\pi$ une $\omega$-représentation tempérée et de longueur finie de $\tilde M(F)$ et soit $X\in\tilde{\mathcal{A}}_{\tilde M,F}$. En utilisant (4), on a

$$I_{\tilde M}(\tilde\pi,X,\phi_{\tilde M}(f))=\sum_{n\geq1}c_n(X)I_{\tilde M}(\tilde\pi,X,\phi_{\tilde M}(f(d_n\circ\tilde H_{\tilde G}),b_n)).$$

D'où, d'après (9),

$$I_{\tilde M}(\tilde\pi,X,\phi_{\tilde M}(f))=\sum_{n\geq1}c_n(X)b_n(X)J^{\tilde G}_{\tilde M}(\tilde\pi,X,f(d_n\circ\tilde H_{\tilde G})).$$

D'après les choix de nos fonctions, on a les égalités

$$c_n(X)b_n(X)=b_n(X),$$

$$b_n(X)J^{\tilde G}_{\tilde M}(\tilde\pi,X,f(d_n\circ\tilde H_{\tilde G}))=b_n(X)J^{\tilde G}_{\tilde M}(\tilde\pi,X,f).$$

Donc

$$I_{\tilde M}(\tilde\pi,X,\phi_{\tilde M}(f))=\sum_{n\geq1}b_n(X)J^{\tilde G}_{\tilde M}(\tilde\pi,X,f)=J^{\tilde G}_{\tilde M}(\tilde\pi,X,f),$$

puisque $(b_n)_{n\geq1}$ est une partition de l'unité. C'est la propriété requise, ce qui démontre la première partie de la proposition. Que l'image de $\phi_{\tilde M}(f)$ dans $I_{ac}(\tilde M(F),\omega)$ soit uniquement déterminée résulte de (5). $\square$

Remarquons que, pour $f \in \mathcal{H}_{ac}(\tilde{G}(F))$ et pour une fonction lisse $b$ sur $\tilde{\mathcal{A}}_{\tilde{G},F}$,

(10) les images dans $I_{ac}(\tilde{M}(F),\omega)$ de $\phi_{\tilde{M}}(f(b\circ\tilde{H}_{\tilde{G}}))$ et $(b\circ\tilde{H}_{\tilde{G}})\phi_{\tilde{M}}(f)$ coïncident.

Cela résulte de (4) et (6).

Pour $f \in \mathcal{H}_{ac}(\tilde{G}(F))$, on note encore $\phi_{\tilde{M}}(f)$ l'image dans $I_{ac}(\tilde{M}(F),\omega)$ de la fonction ainsi notée dans l'énoncé. Alors $\phi_{\tilde{M}}$ devient une application linéaire bien définie de $\mathcal{H}_{ac}(\tilde{G}(F))$ dans $I_{ac}(\tilde{M}(F),\omega)$.

Soit $\tilde{P} = \tilde{M}U_P \in \mathcal{F}(\tilde{M}_0)$. On dispose de l'application $f \mapsto f_{\tilde{P}}$ de $C_c^\infty(\tilde{G}(F),K)$ dans $C_c^\infty(\tilde{M}(F),K^M)$. On sait que l'image de $f_{\tilde{P}}$ dans $I(\tilde{M}(F),K,\omega)$ ne dépend que de $\tilde{M}$ et pas de $\tilde{P}$. On note cette image $f_{\tilde{M}}$. Ceci s'étend à l'espace $\mathcal{H}_{ac}(\tilde{G}(F))$ : pour $f \in \mathcal{H}_{ac}(\tilde{G}(F))$, on définit $f_{\tilde{M}} \in I_{ac}(\tilde{M}(F),\omega)$. Soient maintenant $\tilde{M} \in \mathcal{L}(\tilde{M}_0,\omega)$ et $\tilde{L} \in \mathcal{L}(\tilde{M})$. Pour $f \in \mathcal{H}_{ac}(\tilde{G}(F))$, on a l'égalité dans $I_{ac}(\tilde{M}(F),\omega)$ :

$$(11) \qquad (\phi_{\tilde{L}}^{\tilde{G}}(f))_{\tilde{M}} = \sum_{\tilde{L}'\in\mathcal{L}(\tilde{M})} d_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(\tilde{L},\tilde{L}')\phi_{\tilde{M}}^{\tilde{L}'}(f_{\tilde{Q}'}).$$

La preuve est formelle à partir de la formule de descente du lemme 5.4(iv).

## 6.5 Intégrales orbitales pondérées équivariantes

Appelons forme linéaire $\omega$-équivariante sur $C_c^\infty(\tilde{G}(F),K)$, resp. $\mathcal{H}_{ac}(\tilde{G}(F))$, une forme linéaire qui se factorise en une forme linéaire sur $I(\tilde{G}(F),K,\omega)$, resp. $I_{ac}(\tilde{G}(F),\omega)$. Dans le cas où $F$ est non-archimédien, une forme linéaire $l$ disons sur $C_c^\infty(\tilde{G}(F))$ est $\omega$-équivariante si et seulement si elle vérifie la relation $l({}^g f) = \omega(g)^{-1}l(f)$ pour toute $f \in C_c^\infty(\tilde{G}(F))$ et tout $g \in G(F)$ (cf. 5.5 remarque (2)). On identifiera souvent une forme linéaire $\omega$-équivariante à une forme linéaire sur $I(\tilde{G}(F),K,\omega)$, resp. $I_{ac}(\tilde{G}(F),\omega)$.

**Proposition**. *Soient $\tilde{M} \in \mathcal{L}(\tilde{M}_0)$ et $\gamma \in \tilde{M}(F)\cap\tilde{G}_{reg}(F)$. Il existe une unique forme linéaire $\omega$-équivariante $f \mapsto I_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(\gamma,\omega,f)$ sur $\mathcal{H}_{ac}(\tilde{G}(F))$ qui vérifie l'égalité*

$$I_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(\gamma,\omega,f) = J_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(\gamma,\omega,f) - \sum_{\tilde{L}\in\mathcal{L}(\tilde{M}),\tilde{L}\neq\tilde{G}} I_{\tilde{M}}^{\tilde{L}}(\gamma,\omega,\phi_{\tilde{L}}(f))$$

*pour tout $f \in \mathcal{H}_{ac}(\tilde{G}(F))$.*

Pour donner un sens à cet énoncé, on doit raisonner par récurrence sur le rang semi-simple $rg_{ss}(G)$ de $G$. Si ce rang est nul, ou plus généralement si $\tilde{M} = \tilde{G}$, l'énoncé est tautologique : on a simplement

$$I_{\tilde{G}}^{\tilde{G}}(\gamma,\omega,f) = J_{\tilde{G}}^{\tilde{G}}(\gamma,\omega,f).$$

Si $rg_{ss}(G) > 0$, on suppose par récurrence que les formes linéaires $I_{\tilde{M}}^{\tilde{L}}(\gamma,\omega,.)$ sont définies pour $\tilde{L} \neq \tilde{G}$ (auquel cas $rg_{ss}(L) < rg_{ss}(G)$) et qu'elles sont $\omega$-équivariantes. D'après la dernière assertion de la proposition précédente, le terme $I_{\tilde{M}}^{\tilde{L}}(\gamma,\omega,\phi_{\tilde{L}}(f))$ est bien défini. Il en est donc de même du membre de droite de l'égalité de l'énoncé. Cette égalité définit la forme linéaire $f \mapsto I_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(\gamma,\omega,f)$. L'assertion de la proposition est que celle-ci est $\omega$-équivariante. Dans le cas où $F$ est non-archimédien, on montre que l'égalité $I_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(\gamma,\omega,{}^g f) = \omega(g)^{-1}I_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(\gamma,\omega,f)$ est vérifiée pour tout $g \in G(F)$ : la démonstration, essentiellement formelle, est la même que dans le cas non tordu. On se contente de renvoyer à [A2] proposition 4.1 pour ce cas. Cela suffit pour conclure. Si $F$ est archimédien, cette relation n'a plus de sens si on se limite aux fonctions $K$-finies. On peut l'adapter à de telles fonctions, mais elle ne suffit de toute façon pas à conclure. Pour l'instant, nous laissons la preuve inachevée (on la complètera en 7.1).

**On conserve pour ce paragraphe et jusqu'à la fin de 7.1 l'hypothèse de récurrence ci-dessus, à savoir que la proposition est vérifiée si l'on remplace $\tilde{G}$ par $\tilde{G}'$ avec $rg_{ss}(G') < rg_{ss}(G)$.**

Comme on l'a dit, cela suffit à définir la forme linéaire $f \mapsto I_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(\gamma, \omega, f)$ sur $\mathcal{H}_{ac}(\tilde{G}(F))$.

Il est clair que $I_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(\gamma, \omega, f) = 0$ si $\omega$ n'est pas trivial sur $Z_G(\gamma, F)$.

On aura besoin des propriétés suivantes. On ne démontrera pas les deux premières, leurs preuves étant essentiellement formelles. Soient $\tilde{M}, \tilde{M}' \in \mathcal{L}(\tilde{M}_0)$ et $g \in G(F)$. Supposons $\tilde{M}' = g\tilde{M}g^{-1}$. Alors

(1) pour tout $\gamma \in \tilde{M}(F) \cap \tilde{G}_{reg}(F)$ et tout $f \in \mathcal{H}_{ac}(\tilde{G}(F))$, on a l'égalité

$$I_{\tilde{M}'}^{\tilde{G}}(g\gamma g^{-1}, f) = \omega(g) I_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(\gamma, \omega, f).$$

Soient $\tilde{M} \in \mathcal{L}(\tilde{M}_0)$ et $\tilde{L} \in \mathcal{L}(\tilde{M})$. Soit $\gamma \in \tilde{M}(F) \cap \tilde{G}_{reg}(F)$. Pour $f \in \mathcal{H}_{ac}(\tilde{G}(F))$, on a l'égalité

$$(2) \qquad I_{\tilde{L}}^{\tilde{G}}(\gamma, \omega, f) = \sum_{\tilde{L}' \in \mathcal{L}(\tilde{M})} d_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(\tilde{L}, \tilde{L}') I_{\tilde{M}}^{\tilde{L}'}(\gamma, \omega, f_{\tilde{L}'}).$$

Soient $\tilde{M} \in \mathcal{L}(\tilde{M}_0)$, $\gamma \in \tilde{M}(F) \cap \tilde{G}_{reg}(F)$ et $b$ une fonction lisse sur $\tilde{\mathcal{A}}_{\tilde{G},F}$. On a l'égalité

$$(3) \qquad I_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(\gamma, \omega, f(b \circ \tilde{H}_{\tilde{G}})) = b(\tilde{H}_{\tilde{G}}(\gamma)) I_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(\gamma, \omega, f).$$

Preuve. La propriété analogue pour les intégrales pondérées $J_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(\gamma, \omega, .)$ résulte des définitions. D'autre part, pour $\tilde{L} \in \mathcal{L}(\tilde{M})$, on peut supposer $\phi_{\tilde{L}}(f(b \circ \tilde{H}_{\tilde{G}})) = (b \circ \tilde{H}_{\tilde{G}})\phi_{\tilde{L}}(f)$, cf. 6.4(10). Pour $\tilde{L} \neq \tilde{G}$, on peut supposer par récurrence que (3) est vrai quand on remplace $(\tilde{G}, \tilde{M})$ par $(\tilde{L}, \tilde{M})$. Alors, quand on remplace $f$ par $f(b \circ \tilde{H}_{\tilde{G}})$, le membre de droite de l'égalité de l'énoncé est multiplié par $b(\tilde{H}_{\tilde{G}}(\gamma))$. Donc le membre de gauche aussi. $\square$

Soient $\tilde{M} \in \mathcal{L}(\tilde{M}_0)$ et $\tilde{T}$ un tore tordu maximal de $\tilde{M}$. Alors

(4) il existe un entier $N \geq 0$ et, pour $f \in \mathcal{H}_{ac}(\tilde{G}(F))$ et $\gamma_0 \in \tilde{T}(F)$, il existe $c > 0$ et un voisinage $\Omega$ de $\gamma_0$ dans $\tilde{T}(F)$ tel que l'on ait la majoration

$$|I_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(\gamma, \omega, f)| \leq c(1 + |log(D^{\tilde{G}}(\gamma))|)^N$$

pour tout $\gamma \in \Omega \cap \tilde{G}_{reg}(F)$ ;

(5) pour tout $f \in \mathcal{H}_{ac}(\tilde{G}(F))$, la fonction $\gamma \mapsto I_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(\gamma, \omega, f)$ est lisse sur $\tilde{T}(F) \cap \tilde{G}_{reg}(F)$.

Preuve. En raisonnant par récurrence, il suffit de démontrer les mêmes propriétés pour $J_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(\gamma, \omega, f)$. Au voisinage d'un point $\gamma_0$, cette fonction coïncide avec $J_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(\gamma, \omega, f(b \circ \tilde{H}_{\tilde{G}}))$, où $b \in C_c^\infty(\tilde{\mathcal{A}}_{\tilde{G},F})$ vaut 1 sur un voisinage de $\tilde{H}_{\tilde{G}}(\gamma_0)$. Cela nous ramène au cas où $f \in C_c^\infty(\tilde{G}(F), K)$, lequel cas est traité par 5.4(2) et (3). $\square$

## 6.6 Le théorème

Soient $f_1, f_2 \in C_c^\infty(\tilde{G}(F), K)$. Pour $\tilde{M} \in \mathcal{L}(\tilde{M}_0)$, $\tilde{S} \in T_{ell}(\tilde{M}, \omega)$ et pour $\gamma \in \tilde{S}(F) \cap \tilde{G}_{reg}(F)$, on pose

$$I_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(\gamma, \omega, f_1, f_2) = \sum_{\tilde{L}_1, \tilde{L}_2 \in \mathcal{L}(\tilde{M})} d_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(\tilde{L}_1, \tilde{L}_2) \overline{I_{\tilde{M}}^{\tilde{L}_1}(\gamma, \omega, f_{1,\tilde{L}_1})} I_{\tilde{M}}^{\tilde{L}_2}(\gamma, \omega, f_{2,\tilde{L}_2}).$$

**Remarque.** Pour $i = 1, 2$, l'élément $f_{i,\tilde{L}_i}$ appartient à $I(\tilde{L}_i(F), K^L, \omega)$. Si $\tilde{L}_i \subsetneq \tilde{G}$, le terme $I_{\tilde{M}}^{\tilde{L}_i}(\gamma, \omega, f_{i,\tilde{L}_i})$ est bien défini d'après la proposition 6.5. Si $\tilde{L}_i = \tilde{G}$, on ne sait pas encore que $f \mapsto I_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(\gamma, \omega, f)$ se factorise par $I(\tilde{G}(F), K, \omega)$. Par convention, on suppose dans ce cas que $f_{\tilde{G}} = f$ et $I_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(\gamma, \omega, f_{\tilde{G}}) = I_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(\gamma, \omega, f)$.

On pose

$$I_{\tilde{M},\tilde{S}}^{\tilde{G}}(\omega, f_1, f_2) = |W^M(\tilde{S})|^{-1} mes(A_{\tilde{M}}(F) \backslash S^\theta(F)) \int_{\tilde{S}(F)/(1-\theta)(S(F))} I_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(\gamma, \omega, f_1, f_2)\, d\gamma.$$

Montrons que

(1) cette intégrale est absolument convergente.

Preuve. D'après 6.5(4) et (5) et 4.2(2), la fonction à intégrer est localement intégrable. Il suffit de prouver qu'elle est à support compact. Puisque $\tilde{S}$ est elliptique dans $\tilde{M}$, il suffit de prouver que la projection de ce support sur $\tilde{\mathcal{A}}_{\tilde{M}}$ l'est. On peut encore fixer $\tilde{L}_1, \tilde{L}_2$ tels que $d_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(\tilde{L}_1, \tilde{L}_2) \neq 0$ et remplacer la fonction par

$$\overline{I_{\tilde{M}}^{\tilde{L}_1}(\gamma, \omega, f_{1,\tilde{L}_1})} I_{\tilde{M}}^{\tilde{L}_2}(\gamma, \omega, f_{2,\tilde{L}_2}).$$

Puisque $f_{1,\tilde{L}_1}$ est à support compact, la relation 6.5(3) entraîne que le support de la première fonction ci-dessus a une projection compacte dans $\tilde{\mathcal{A}}_{\tilde{L}_1}$. De même, le support de la seconde fonction a une projection compacte dans $\tilde{\mathcal{A}}_{\tilde{L}_2}$. La non-nullité de $d_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(\tilde{L}_1, \tilde{L}_2)$ entraîne que le produit des projections

$$\tilde{\mathcal{A}}_{\tilde{M}} \to \tilde{\mathcal{A}}_{\tilde{L}_1} \times \tilde{\mathcal{A}}_{\tilde{L}_2}$$

est injective. Donc le support du produit des deux fonctions a bien les propriétés requises. $\square$

Posons

$$I_{\tilde{M},géom}^{\tilde{G}}(\omega, f_1, f_2) = \sum_{\tilde{S} \in T_{ell}(\tilde{M}, \omega)} I_{\tilde{M},\tilde{S}}^{\tilde{G}}(\omega, f_1, f_2),$$

puis

$$I_{géom}^{\tilde{G}}(\omega, f_1, f_2) = \sum_{\tilde{M} \in \mathcal{L}(\tilde{M}_0)} |\tilde{W}^M||\tilde{W}^G|^{-1}(-1)^{a_{\tilde{M}} - a_{\tilde{G}}} I_{\tilde{M},géom}^{\tilde{G}}(\omega, f_1, f_2).$$

D'autre part, posons

$$I_{disc}^{\tilde{G}}(\omega, f_1, f_2) = J_{\tilde{G},spec}^{\tilde{G}}(\omega, f_1, f_2),$$

cf. 3.25.

**Théorème**. *Pour tous $f_1, f_2 \in C_c^\infty(\tilde{G}(F), K)$, on a l'égalité*

$$I_{géom}^{\tilde{G}}(\omega, f_1, f_2) = I_{disc}^{\tilde{G}}(\omega, f_1, f_2).$$

Preuve. Cette preuve est formelle. Compte tenu de l'importance du théorème, nous la traitons en détail. On a besoin de quelques constructions, formelles comme on vient de le dire. Pour deux espaces vectoriels complexes $V$ et $V'$, notons $V\boxtimes V'$ leur produit tensoriel "sesquilinéaire", précisément le produit tensoriel $\bar{V}\otimes V'$, où $\bar{V}$ est le conjugué complexe de $V$. Posons simplement

$$\underline{C}(\tilde{G}(F))=C_c^\infty(\tilde{G}(F),K)\boxtimes C_c^\infty(\tilde{G}(F),K),$$
$$\underline{H}_{ac}(\tilde{G}(F))=\mathcal{H}_{ac}(\tilde{G}(F))\boxtimes\mathcal{H}_{ac}(\tilde{G}(F)),$$
$$\underline{I}_{ac}(\tilde{G}(F),\omega)=I_{ac}(\tilde{G}(F),\omega)\boxtimes I_{ac}(\tilde{G}(F),\omega).$$

Pour $\tilde{L}\in\mathcal{L}(\tilde{M}_0)$, $\tilde{L}\neq\tilde{G}$, on définit une application

$$\underline{\phi}_{\tilde{L}}:\underline{H}_{ac}(\tilde{G}(F))\to\underline{I}_{ac}(\tilde{L}(F),\omega)$$

par la formule

$$(2)\qquad \underline{\phi}_{\tilde{L}}(f_1\boxtimes f_2)=\sum_{\tilde{L}_1,\tilde{L}_1\in\mathcal{L}(\tilde{L})}d_{\tilde{L}}^{\tilde{G}}(\tilde{L}_1,\tilde{L}_2)\phi_{\tilde{L}}^{\tilde{L}_1}(f_{1,\bar{\tilde{Q}}_1})\boxtimes\phi_{\tilde{L}}^{\tilde{L}_2}(f_{2,\tilde{Q}_2}).$$

Le membre de droite dépend d'un choix de paramètre auxiliaire définissant l'application $(\tilde{L}_1,\tilde{L}_2)\mapsto(\tilde{Q}_1,\tilde{Q}_2)$. Pour que la définition soit correcte, on doit montrer qu'elle est indépendante de ce choix. Fixons des $\omega$-représentations $L$-irréductibles et tempérées $\tilde{\pi}_1$ et $\tilde{\pi}_2$ de $\tilde{L}(F)$ et des éléments $X_1,X_2\in\tilde{\mathcal{A}}_{\tilde{L},F}$. Considérons la forme linéaire sur $\underline{I}_{ac}(\tilde{L}(F),\omega)$ définie par

$$(\varphi_1,\varphi_2)\mapsto\overline{I_{\tilde{L}}(\tilde{\pi}_1,X_1,\varphi_1)}I_{\tilde{L}}(\tilde{\pi}_2,X_2,\varphi_2).$$

D'après 6.4(5), il suffit de prouver que cette forme linéaire prend sur le membre de droite de (2) une valeur qui ne dépend pas du choix du paramètre auxiliaire. D'après les définitions des applications $\phi_{\tilde{L}}^{\tilde{L}_i}$ pour $i=1,2$, cette valeur est

$$\sum_{\tilde{L}_1,\tilde{L}_1\in\mathcal{L}(\tilde{L})}d_{\tilde{L}}^{\tilde{G}}(\tilde{L}_1,\tilde{L}_2)\overline{J_{\tilde{L}}^{\tilde{L}_1}(\tilde{\pi}_1,X_1,f_{1,\bar{\tilde{Q}}_1})}J_{\tilde{L}}^{\tilde{L}_2}(\tilde{\pi}_2,X_2,f_{2,\tilde{Q}_2}).$$

On peut remplacer $f_1$ et $f_2$ par leurs produits avec $b\circ\tilde{H}_{\tilde{G}}$, où $b\in C_c^\infty(\tilde{\mathcal{A}}_{\tilde{G},F})$ vaut 1 sur les images de $X_1$ et $X_2$ dans $\tilde{\mathcal{A}}_{\tilde{G},F}$. On peut donc supposer $f_1$ et $f_2$ à support compacts. L'expression ci-dessus est alors déduite par transformation de Fourier de la fonction

$$(\tilde{\lambda}_1,\tilde{\lambda}_2)\mapsto\sum_{\tilde{L}_1,\tilde{L}_1\in\mathcal{L}(\tilde{L})}d_{\tilde{L}}^{\tilde{G}}(\tilde{L}_1,\tilde{L}_2)\overline{J_{\tilde{L}}^{\tilde{L}_1}(\tilde{\pi}_{1,\tilde{\lambda}_1},f_{1,\bar{\tilde{Q}}_1})}J_{\tilde{L}}^{\tilde{L}_2}(\tilde{\pi}_{2,\tilde{\lambda}_2},f_{2,\tilde{Q}_2})$$

sur $i\tilde{\mathcal{A}}_{\tilde{L},F}^*\times i\tilde{\mathcal{A}}_{\tilde{L},F}^*$. Il suffit de prouver que cette fonction ne dépend pas du choix du paramètre auxiliaire. Quitte à tordre $\tilde{\pi}_1$ et $\tilde{\pi}_2$, on est ramené à montrer que l'expression

$$(3)\qquad\sum_{\tilde{L}_1,\tilde{L}_1\in\mathcal{L}(\tilde{L})}d_{\tilde{L}}^{\tilde{G}}(\tilde{L}_1,\tilde{L}_2)\overline{J_{\tilde{L}}^{\tilde{L}_1}(\tilde{\pi}_1,f_{1,\bar{\tilde{Q}}_1})}J_{\tilde{L}}^{\tilde{L}_2}(\tilde{\pi}_2,f_{2,\tilde{Q}_2})$$

est indépendante de ce choix. Fixons $\tilde{P}\in\mathcal{P}(\tilde{L})$. Pour $i=1,2$, introduisons la $(\tilde{G},\tilde{L})$-famille à valeurs opérateurs $(\mathcal{M}(\pi_i;\Lambda,\tilde{Q}))_{\tilde{Q}\in\mathcal{P}(\tilde{L})}$. Posons

$$\mathcal{M}(\pi_1\boxtimes\pi_2;\Lambda,\tilde{Q})=\mathcal{M}(\pi_1;\Lambda,\bar{\tilde{Q}})\boxtimes\mathcal{M}(\pi_2;\Lambda,\tilde{Q}).$$

De la $(\tilde{G},\tilde{L})$-famille $(\mathcal{M}(\pi_1\boxtimes\pi_2;\Lambda,\tilde{Q}))_{\tilde{Q}\in\mathcal{P}(\tilde{L})}$ se déduit un opérateur $\mathcal{M}_{\tilde{L}}^{\tilde{G}}(\pi_1\boxtimes\pi_2)$ comme en 2.7. On pose

$$J_{\tilde{L}}^{\tilde{G}}(\tilde{\pi}_1\boxtimes\tilde{\pi}_2,f_1\boxtimes f_2)=trace(\mathcal{M}_{\tilde{L}}^{\tilde{G}}(\pi_1\boxtimes\pi_2)(Ind_{\tilde{P}}^{\tilde{G}}(f_1)\boxtimes Ind_{\tilde{P}}^{\tilde{G}}(f_2))).$$

Le lemme 5.4(ii) se généralise à cette situation : $J_{\tilde{L}}^{\tilde{G}}(\tilde{\pi}_1\boxtimes\tilde{\pi}_2,f_1\boxtimes f_2)$ est égal à (3). Puisque $J_{\tilde{L}}^{\tilde{G}}(\tilde{\pi}_1\boxtimes\tilde{\pi}_2,f_1\boxtimes f_2)$ ne dépend d'aucun choix, il en est de même de (3), ce que l'on voulait démontrer.

Remarquons que pour $f\in\mathcal{H}_{ac}(\tilde{G}(F))$, l'image par $\tilde{H}_{\tilde{G}}$ du support $Supp(f)$ de $f$ est fermée : localement, c'est l'image de $Supp(f(b\circ\tilde{H}_{\tilde{G}}))$ pour une fonction $b$ à support compact convenable et ce dernier support est compact. On note $\underline{H}_{ac}(\tilde{G}(F))^1$, resp. $\underline{H}_{ac}(\tilde{G}(F))_0$, le sous-espace de $\underline{H}_{ac}(\tilde{G}(F))$ engendré par les fonctions $f_1\otimes f_2$ telles que

$$\tilde{H}_{\tilde{G}}(Supp(f_1))\cap\tilde{H}_{\tilde{G}}(Supp(f_2))$$

soit compact, resp. vide. On a l'égalité

$$(4)\qquad \underline{H}_{ac}(\tilde{G}(F))^1=\underline{C}(\tilde{G}(F))+\underline{H}_{ac}(\tilde{G}(F))_0.$$

En effet, soient $f_1,f_2\in\mathcal{H}_{ac}(\tilde{G}(F))$ tels que $\tilde{H}_{\tilde{G}}(Supp(f_1))\cap\tilde{H}_{\tilde{G}}(Supp(f_2))$ soit compact. Choisissons une fonction $b'\in C_c^\infty(\tilde{\mathcal{A}}_{\tilde{G}})$ valant 1 sur un voisinage de ce compact. Posons $b''=1-b'$ et, pour $i=1,2$, $f_i'=f_i(b'\circ\tilde{H}_{\tilde{G}})$, $f_i''=f_i(b''\circ\tilde{H}_{\tilde{G}})$. On a l'égalité

$$f_1\boxtimes f_2=(f_1'\boxtimes f_2')+(f_1'\boxtimes f_2'')+(f_1''\boxtimes f_2')+(f_1''\boxtimes f_2'').$$

Le premier terme appartient à $\underline{C}(\tilde{G}(F))$, les trois autres à $\underline{H}_{ac}(\tilde{G}(F))_0$. D'où (4).

Notons $\underline{I}_{ac}(\tilde{G}(F),\omega)^1$ l'image de $\underline{H}_{ac}(\tilde{G}(F))^1$ dans $\underline{I}_{ac}(\tilde{G}(F),\omega)$. Montrons que

(5) l'application $\underline{\phi}_{\tilde{L}}$ envoie $\underline{H}_{ac}(\tilde{G}(F))^1$ dans $\underline{I}_{ac}(\tilde{L}(F),\omega)^1$.

Preuve. D'après (4), il suffit de montrer que $\underline{\phi}_{\tilde{L}}(f_1\boxtimes f_2)\in\underline{I}_{ac}(\tilde{L}(F),\omega)^1$ dans les deux cas suivants

(6) $f_i\in C_c^\infty(\tilde{G}(F),K)$ pour $i=1,2$ ;

(7) $f_i\in\mathcal{H}_{ac}(\tilde{G}(F))$ pour $i=1,2$ et $\tilde{H}_{\tilde{G}}(Supp(f_1))\cap\tilde{H}_{\tilde{G}}(Supp(f_2))=\emptyset$.

Soit $(\tilde{L}_1,\tilde{L}_2)$ intervenant dans la formule (2). On pose $\varphi_1=\phi_{\tilde{L}}^{\tilde{L}_1}(f_{1,\tilde{Q}_1})$ et $\varphi_2=\phi_{\tilde{L}}^{\tilde{L}_2}(f_{2,\tilde{Q}_2})$. Dans le cas (6), les fonctions $f_{1,\tilde{Q}_1}$ et $f_{2,\tilde{Q}_2}$ sont à supports compacts. D'après 6.4(10), on peut supposer que $\tilde{H}_{\tilde{L}_i}(Supp(\varphi_i))$ est compact pour $i=1,2$. Il en résulte que $\tilde{H}_{\tilde{L}}(Supp(\varphi_1))\cap\tilde{H}_{\tilde{L}}(Supp(\varphi_2))$ a une projection compacte dans $\tilde{\mathcal{A}}_{\tilde{L}_i}$ pour $i=1,2$. Comme dans la preuve de (1), la non-nullité de $d_{\tilde{L}}^{\tilde{G}}(\tilde{L}_1,\tilde{L}_2)$ entraîne que l'ensemble $\tilde{H}_{\tilde{L}}(Supp(\varphi_1))\cap\tilde{H}_{\tilde{L}}(Supp(\varphi_2))$ lui-même est compact. Donc $\varphi_1\boxtimes\varphi_2\in\underline{H}_{ac}(\tilde{L}(F))^1$. Dans le cas (7), puisque $\tilde{H}_{\tilde{G}}(Supp(f_i))$ est fermé pour $i=1,2$, on peut fixer des fonctions $b_i$ sur $\tilde{\mathcal{A}}_{\tilde{G},F}$, lisses, à supports disjoints, telles que $b_i$ vaille 1 sur $\tilde{H}_{\tilde{G}}(Supp(f_i))$. D'après 6.4(10), on peut remplacer $\varphi_i$ par $\varphi_i(b_i\circ\tilde{H}_{\tilde{G}})$. Mais alors $\tilde{H}_{\tilde{G}}(Supp(\varphi_1))\cap\tilde{H}_{\tilde{G}}(Supp(\varphi_2))$ est vide, a fortiori $\tilde{H}_{\tilde{L}}(Supp(\varphi_1))\cap\tilde{H}_{\tilde{L}}(Supp(\varphi_2))$ l'est et $\varphi_1\boxtimes\varphi_2$ appartient à $\underline{H}_{ac}(\tilde{L}(F))^1$. Cela prouve (5).

On a défini $\underline{\phi}_{\tilde{L}}$ pour $\tilde{L}\neq\tilde{G}$. On note simplement $\underline{\phi}_{\tilde{G}}$ l'identité de $\underline{H}_{ac}(\tilde{G}(F))$.

Les distributions $(f_1,f_2)\mapsto J_{g\acute{e}om}^{\tilde{G}}(\omega,f_1,f_2)$, $(f_1,f_2)\mapsto I_{g\acute{e}om}^{\tilde{G}}(\omega,f_1,f_2)$ et celles qui les constituent peuvent être considérées comme des formes linéaires sur $\underline{C}(\tilde{G}(F))$. En fait elles se prolongent à l'espace $\underline{H}_{ac}^1$ : pour une telle distribution $D$ et pour $\underline{f}\in\underline{H}_{ac}^1$, on écrit $\underline{f} = \underline{f}_c + \underline{f}_0$ avec $\underline{f}_c \in \underline{C}(\tilde{G}(F))$ et $\underline{f}_0 \in \underline{H}_{ac}(\tilde{G}(F))_0$ et on pose $D(\underline{f}) = D(\underline{f}_c)$. Pour que cette définition soit loisible, il faut évidemment montrer que $D(\underline{f}) = 0$ si $\underline{f} \in \underline{C}(\tilde{G}(F)) \cap \underline{H}_{ac}(\tilde{G}(F))_0$. Les distributions en question s'expriment à l'aide des distributions basiques $\underline{f} \mapsto J^{\tilde{G}}_{\tilde{M}}(\gamma, \omega, \underline{f})$ ou $\underline{f} \mapsto I^{\tilde{G}}_{\tilde{M}}(\gamma, \omega, \underline{f})$, il suffit donc de traiter celles-ci. Chacune d'elles s'étend naturellement à $\underline{H}_{ac}(\tilde{G}(F))$ tout entier, il suffit donc de montrer que ces distributions étendues annulent $\underline{H}_{ac}(\tilde{G}(F))_0$. Soient donc $f_1$ et $f_2$ vérifiant (7). On choisit des fonctions $b_i$ comme dans la preuve de (5). Il résulte des définitions et de 6.5(3) que, pour chacune de nos deux distributions $D$ ci-dessus, on a les égalités

$$D(f_1 \boxtimes f_2) = D(f_1(b_1 \circ \tilde{H}_{\tilde{G}}) \boxtimes f_2(b_2 \circ \tilde{H}_{\tilde{G}})) = b_1(\tilde{H}_{\tilde{G}}(\gamma))b_2(\tilde{H}_{\tilde{G}}(\gamma))D(f_1 \boxtimes f_2) = 0,$$

ce qu'on voulait démontrer.

Si on admet la proposition 6.5, le prolongement à $\underline{H}_{ac}(\tilde{G}(F))^1$ de la distribution $(f_1, f_2) \mapsto I^{\tilde{G}}_{géom}(\omega, f_1, f_2)$ se quotiente en une forme linéaire sur $\underline{I}_{ac}(\tilde{G}(F), \omega)^1$ parce les distributions $\underline{f} \mapsto I^{\tilde{G}}_{\tilde{M}}(\gamma, \omega, \underline{f})$ qui le constituent se quotientent ainsi.

La distribution $(f_1, f_2) \mapsto I^{\tilde{G}}_{disc}(\omega, f_1, f_2)$ peut elle-aussi être vue comme une forme linéaire sur $\underline{C}(\tilde{G}(F))$. Montrons qu'elle se prolonge à $\underline{H}_{ac}(\tilde{G}(F))^1$ par le même procédé que ci-dessus et que ce prolongement se quotiente en une forme linéaire sur l'espace $\underline{I}_{ac}(\tilde{G}(F), \omega)^1$. La distribution en question est combinaison linéaire de distributions

$$(f_1, f_2) \mapsto \int_{i\mathcal{A}^*_{\tilde{G},F}} \overline{I_{\tilde{G}}(\tilde{\pi}_{\tilde{\lambda}}, f_1)} I_{\tilde{G}}(\tilde{\pi}_{\tilde{\lambda}}, f_2)\, d\lambda,$$

où $\tilde{\pi}$ est une $\omega$-représentation tempérée de $\tilde{G}(F)$. On transforme celles-ci par inversion de Fourier en

$$(f_1, f_2) \mapsto mes(i\mathcal{A}^*_{\tilde{G},F}) \int_{\tilde{\mathcal{A}}_{\tilde{L},F}} \overline{I_{\tilde{G}}(\tilde{\pi}, X, f_1)} I_{\tilde{G}}(\tilde{\pi}, X, f_2)\, dX.$$

On montre grâce à 6.4(4) qu'une distribution

$$(8) \qquad (f_1, f_2) \mapsto \overline{I_{\tilde{G}}(\tilde{\pi}, X, f_1)} I_{\tilde{G}}(\tilde{\pi}, X, f_2)$$

annule $\underline{C}(\tilde{G}(F)) \cap \underline{H}_{ac}(\tilde{G}(F))_0$. Comme pour les distributions "géométriques", cela permet de prolonger la distribution $(f_1, f_2) \mapsto I^{\tilde{G}}_{disc}(\omega, f_1, f_2)$ à $\underline{H}_{ac}(\tilde{G}(F))^1$. Ce prolongement se quotiente en une forme linéaire sur $\underline{I}_{ac}(\tilde{G}(F), \omega)^1$ parce les distributions (8) qui le constituent se quotientent ainsi.

Remarquons que, si l'énoncé du théorème est vrai, il s'étend en l'égalité

$$I^{\tilde{G}}_{géom}(\omega, \underline{f}) = I^{\tilde{G}}_{disc}(\omega, \underline{f})$$

pour tout $\underline{f} \in \underline{H}_{ac}(\tilde{G}(F))^1$ (ou $\underline{f} \in \underline{I}_{ac}(\tilde{G}(F), \omega)^1$ si on admet la proposition 6.5) puisque chaque terme est par définition le même terme évalué sur $\underline{f}_c$ où, comme plus haut $\underline{f}_c$ est un élément de $\underline{C}(\tilde{G}(F))$ tel que $\underline{f} \in \underline{f}_c + \underline{H}_{ac}(\tilde{G}(F))_0$.

Venons-en à la preuve du théorème. Elle se fait par récurrence sur $rg_{ss}(G)$. On suppose vérifiés le théorème et la proposition 6.5 pour les espaces $\tilde{G}'$ tels que $rg_{ss}(G') < rg_{ss}(G)$. Soient $f_i \in C_c^\infty(\tilde{G}(F), K)$ pour $i = 1, 2$, posons $\underline{f} = f_1 \boxtimes f_2$. Soit $\tilde{L} \in \mathcal{L}(\tilde{M}_0)$. Montrons que

$$(9) \qquad J^{\tilde{G}}_{\tilde{L},spec}(\omega, f_1, f_2) = I^{\tilde{L}}_{disc}(\omega, \underline{\phi}_{\tilde{L}}(\underline{f})).$$

C'est tautologique si $\tilde{L}=\tilde{G}$. Supposons $\tilde{L}\neq\tilde{G}$. Les deux côtés sont des combinaisons linéaires indexées par $\tau\in(E_{disc}(\tilde{L},\omega)/conj)/i\mathcal{A}^*_{\tilde{L},F}$ de produits des mêmes coefficients et de certaines distributions. La distribution qui intervient dans le membre de gauche est

$$(10)\qquad \int_{i\mathcal{A}^*_{\tilde{L},F}} J^{\tilde{G}}_{\tilde{L}}(\pi_{\tau_\lambda},f_1,f_2)\,d\lambda.$$

Relevons $\tau$ en un élément $\boldsymbol{\tau}\in\mathcal{E}(\tilde{L},\omega)$. Pour $X\in\tilde{\mathcal{A}}_{\tilde{L},F}$, notons $\underline{\varphi}\mapsto I_{\tilde{L}}(\pi_\tau,X,\underline{\varphi})$ le prolongement à $\underline{H}_{ac}(\tilde{G})^1$ de la distribution

$$(\varphi_1,\varphi_2)\mapsto\overline{I_{\tilde{L}}(\tilde{\pi}_{\boldsymbol{\tau}},X,\varphi_1)}I_{\tilde{L}}(\tilde{\pi}_{\boldsymbol{\tau}},X,\varphi_2).$$

Alors la distribution intervenant dans le membre de droite de (9) est

$$(11)\qquad mes(i\mathcal{A}^*_{\tilde{L},F})\int_{\tilde{\mathcal{A}}_{\tilde{L},F}} I_{\tilde{L}}(\pi_\tau,X,\underline{\phi}_{\tilde{L}}(\underline{f}))\,dX.$$

Il faut montrer que les expressions (10) et (11) sont égales. Par transformation de Fourier, le lemme 5.4(ii) entraîne que (10) est égal à

$$mes(i\mathcal{A}^*_{\tilde{L},F})\sum_{\tilde{L}_1,\tilde{L}_2\in\mathcal{L}(\tilde{L})} d^{\tilde{G}}_{\tilde{L}}(\tilde{L}_1,\tilde{L}_2)\int_{\tilde{\mathcal{A}}_{\tilde{L},F}}\overline{J^{\tilde{L}_1}_{\tilde{L}}(\tilde{\pi}_{\boldsymbol{\tau}},X,f_{1,\tilde{Q}_1})}J^{\tilde{L}_2}_{\tilde{L}}(\tilde{\pi}_{\boldsymbol{\tau}},X,f_{2,\tilde{Q}_2})\,dX.$$

D'après les définitions des applications $\phi^{\tilde{L}_i}_{\tilde{L}}$ pour $i=1,2$, c'est aussi

$$mes(i\mathcal{A}^*_{\tilde{L},F})\sum_{\tilde{L}_1,\tilde{L}_2\in\mathcal{L}(\tilde{L})} d^{\tilde{G}}_{\tilde{L}}(\tilde{L}_1,\tilde{L}_2)\int_{\tilde{\mathcal{A}}_{\tilde{L},F}}\overline{I_{\tilde{L}}(\tilde{\pi}_{\boldsymbol{\tau}},X,\phi^{\tilde{L}_1}_{\tilde{L}}(f_{1,\tilde{Q}_1}))}I_{\tilde{L}}(\tilde{\pi}_{\boldsymbol{\tau}},X,\phi^{\tilde{L}_2}_{\tilde{L}}(f_{2,\tilde{Q}_2}))\,dX.$$

L'égalité de cette expression avec (11) résulte alors de la définition de $\underline{\phi}_{\tilde{L}}$. Cela prouve (9).

Pour $\tilde{L}\neq\tilde{G}$, on peut par l'hypothèse de récurrence utiliser le théorème prolongé comme indiqué ci-dessus : on a

$$I^{\tilde{L}}_{disc}(\omega,\underline{\phi}_{\tilde{L}}(\underline{f}))=I^{\tilde{L}}_{g\acute{e}om}(\omega,\underline{\phi}_{\tilde{L}}(\underline{f})).$$

Alors (9) implique

$$J^{\tilde{G}}_{spec}(\omega,f_1,f_2)=I^{\tilde{G}}_{disc}(\omega,f_1,f_2)-I^{\tilde{G}}_{g\acute{e}om}(\omega,f_1,f_2)+X,$$

où

$$X=\sum_{\tilde{L}\in\mathcal{L}(\tilde{M}_0)}|\tilde{W}^L||\tilde{W}^G|^{-1}(-1)^{a_{\tilde{L}}-a_{\tilde{G}}}I^{\tilde{L}}_{g\acute{e}om}(\underline{\phi}_{\tilde{L}}(\underline{f}))$$

(rappelons que, par convention, $\underline{\phi}_{\tilde{G}}$ l'identité de $\underline{H}_{ac}(\tilde{G}(F))$). En utilisant le théorème 5.1, la relation cherchée

$$I^{\tilde{G}}_{g\acute{e}om}(\omega,f_1,f_2)=I^{\tilde{G}}_{disc}(\omega,f_1,f_2)$$

équivaut à l'égalité

$$(12)\qquad J^{\tilde{G}}_{g\acute{e}om}(\omega,f_1,f_2)=X.$$

Par définition

$$X=\sum_{\tilde{L}\in\mathcal{L}(\tilde{M}_0)}|\tilde{W}^L||\tilde{W}^G|^{-1}(-1)^{a_{\tilde{L}}-a_{\tilde{G}}}\sum_{\tilde{M}\in\mathcal{L}^{\tilde{L}}(\tilde{M}_0)}|\tilde{W}^M||\tilde{W}^L|^{-1}(-1)^{a_{\tilde{M}}-a_{\tilde{L}}}I^{\tilde{L}}_{\tilde{M},géom}(\omega,\underline{\phi}_{\tilde{L}}(\underline{f}))$$

$$=\sum_{\tilde{M}\in\mathcal{L}(\tilde{M}_0)}|\tilde{W}^M||\tilde{W}^G|^{-1}(-1)^{a_{\tilde{M}}-a_{\tilde{G}}}X_{\tilde{M}},$$

où

$$X_{\tilde{M}}=\sum_{\tilde{L}\in\mathcal{L}(\tilde{M})}I^{\tilde{L}}_{\tilde{M},géom}(\omega,\underline{\phi}_{\tilde{L}}(\underline{f})).$$

En se rappelant la définition de $J^{\tilde{G}}_{géom}(\omega,f_1,f_2)$, il suffit pour démontrer (12) de fixer $\tilde{M}\in\mathcal{L}(\tilde{M}_0)$ et de prouver l'égalité

$$(13)\qquad J^{\tilde{G}}_{\tilde{M},géom}(\omega,f_1,f_2)=X_{\tilde{M}}.$$

Les deux membres de cette égalité sont des sommes sur $\tilde{S}\in T_{ell}(\tilde{M},\omega)$ de coefficients (qui sont les mêmes pour les deux membres) et d'intégrales sur $\tilde{S}(F)/(1-\theta)(S(F))$ de certaines fonctions. Il suffit de fixer $\tilde{S}$ et de prouver que les fonctions sont les mêmes. Fixons donc $\tilde{S}$ et un point $\gamma\in\tilde{S}(F)\cap\tilde{G}_{reg}(F)$. La valeur en $\gamma$ de la fonction relative au membre de gauche de (13) est

$$\sum_{\tilde{M}_1,\tilde{M}_2\in\mathcal{L}(\tilde{M})}d^{\tilde{G}}_{\tilde{M}}(\tilde{M}_1,\tilde{M}_2)\overline{J^{\tilde{M}_1}_{\tilde{M}}(\gamma,\omega,f_{1,\tilde{\bar{P}}_1})}J^{\tilde{M}_2}_{\tilde{M}}(\gamma,\omega,f_{2,\tilde{\bar{P}}_2}),$$

cela d'après le lemme 5.4(i). On peut exprimer les intégrales orbitales pondérées à l'aide d'intégrales équivariantes grâce à la proposition 6.5. On obtient

$$\sum_{\tilde{M}_1,\tilde{M}_2\in\mathcal{L}(\tilde{M})}d^{\tilde{G}}_{\tilde{M}}(\tilde{M}_1,\tilde{M}_2)\sum_{\tilde{L}_1\in\mathcal{L}^{\tilde{M}_1}(\tilde{M})}\sum_{\tilde{L}_2\in\mathcal{L}^{\tilde{M}_2}(\tilde{M})}\overline{I^{\tilde{L}_1}_{\tilde{M}}(\gamma,\omega,\phi^{\tilde{M}_1}_{\tilde{L}_1}(f_{1,\tilde{\bar{P}}_1})}I^{\tilde{L}_2}_{\tilde{M}}(\gamma,\omega,\phi^{\tilde{M}_2}_{\tilde{L}_2}(f_{2,\tilde{\bar{P}}_2})),$$

en posant la convention que $\phi^{\tilde{G}}_{\tilde{G}}$ est l'identité de $C_c^\infty(\tilde{G}(F),K)$. Si $\tilde{L}_1$ et $\tilde{L}_2$ sont tous deux différents de $\tilde{G}$, la distribution

$$(\varphi_1,\varphi_2)\to\overline{I^{\tilde{L}_1}_{\tilde{M}}(\gamma,\omega,\varphi_1)}I^{\tilde{L}_2}_{\tilde{M}}(\gamma,\omega,\varphi_2)$$

peut être considérée comme une forme linéaire sur $I_{ac}(\tilde{L}_1(F),\omega)\boxtimes I_{ac}(\tilde{L}_2(F),\omega)$. Notons-la $\underline{\varphi}\mapsto I^{\tilde{L}_1,\tilde{L}_2}_{\tilde{M}}(\gamma,\omega,\underline{\varphi})$. Dans le cas où l'un des $\tilde{L}_i$ est égal à $\tilde{G}$ (ou les deux), on utilise la même notation en remplaçant la composante $I_{ac}(\tilde{L}_i(F),\omega)$ de l'espace de départ par $\mathcal{H}_{ac}(\tilde{G}(F))$. Alors l'expression précédente s'écrit

$$(14)\qquad\sum_{\tilde{L}_1,\tilde{L}_2\in\mathcal{L}(\tilde{M})}I^{\tilde{L}_1,\tilde{L}_2}_{\tilde{M}}(\gamma,\omega,\underline{\varphi}(\tilde{L}_1,\tilde{L}_2)),$$

où

$$\underline{\varphi}(\tilde{L}_1,\tilde{L}_2)=\sum_{\tilde{M}_1\in\mathcal{L}(\tilde{L}_1),\tilde{M}_2\in\mathcal{L}(\tilde{L}_2)}d^{\tilde{G}}_{\tilde{M}}(\tilde{M}_1,\tilde{M}_2)\phi^{\tilde{M}_1}_{\tilde{L}_1}(f_{1,\tilde{\bar{P}}_1})\boxtimes\phi^{\tilde{M}_2}_{\tilde{L}_2}(f_{2,\tilde{P}_2}).$$

La valeur de la fonction intervenant dans le membre de droite de (13) est

$$\sum_{\tilde{L}\in\mathcal{L}(\tilde{M})} I_{\tilde{M}}^{\tilde{L}}(\gamma,\omega,\underline{\phi}_{\tilde{L}}(\underline{f})).$$

D'après les définitions, cela s'écrit encore

$$\sum_{\tilde{L}\in\mathcal{L}(\tilde{M})}\ \sum_{\tilde{L}_1,\tilde{L}_2\in\mathcal{L}^{\tilde{L}}(\tilde{M})} d_{\tilde{M}}^{\tilde{L}}(\tilde{L}_1,\tilde{L}_2) I_{\tilde{M}}^{\tilde{L}_1,\tilde{L}_2}(\gamma,\omega,(\underline{\phi}_{\tilde{L}}(\underline{f}))_{\tilde{L}_1,\tilde{L}_2}),$$

où on a noté $\underline{\varphi}\mapsto\underline{\varphi}_{\tilde{L}_1,\tilde{L}_2}$ l'application linéaire de $\underline{H}_{ac}(\tilde{L}(F))$ dans $I_{ac}(\tilde{L}_1(F),\omega)\boxtimes I_{ac}(\tilde{L}_2(F),\omega)$ qui envoie $\varphi_1\boxtimes\varphi_2$ sur $\varphi_{1,\tilde{L}_1}\boxtimes\varphi_{2,\tilde{L}_2}$. Ici encore, on doit modifier la définition si l'un des $\tilde{L}_i$ est égal à $\tilde{G}$ : on remplace $I_{ac}(\tilde{L}_i(F),\omega)$ par $\mathcal{H}_{ac}(\tilde{G}(F))$ et $\varphi_{i,\tilde{L}_i}$ par $\varphi_i$. L'expression ci-dessus s'écrit encore

$$(15)\qquad \sum_{\tilde{L}_1,\tilde{L}_2\in\mathcal{L}(\tilde{M})} I_{\tilde{M}}^{\tilde{L}_1,\tilde{L}_2}(\gamma,\omega,\underline{\varphi}'(\tilde{L}_1,\tilde{L}_2)),$$

où

$$\underline{\varphi}'(\tilde{L}_1,\tilde{L}_2)=\sum_{\tilde{L}\in\mathcal{L}(\tilde{M});\tilde{L}_1,\tilde{L}_2\subset\tilde{L}} d_{\tilde{M}}^{\tilde{L}}(\tilde{L}_1,\tilde{L}_2)(\underline{\phi}_{\tilde{L}}(\underline{f}))_{\tilde{L}_1,\tilde{L}_2}.$$

On doit prouver que les expressions (14) et (15) sont égales. Il suffit de fixer $\tilde{L}_1$ et $\tilde{L}_2$ et de prouver l'égalité

$$(16)\qquad \underline{\varphi}(\tilde{L}_1,\tilde{L}_2)=\underline{\varphi}'(\tilde{L}_1,\tilde{L}_2).$$

Fixons donc $\tilde{L}_1$ et $\tilde{L}_2$. On voit d'abord que les deux membres sont nuls si la condition

$$(17)\qquad \mathcal{A}_{\tilde{M}}^{\tilde{L}_1}\cap\mathcal{A}_{\tilde{M}}^{\tilde{L}_2}=\{0\}$$

n'est pas vérifiée. En effet, dans ce cas, il n'y a pas de couples $(\tilde{M}_1,\tilde{M}_2)$ intervenant dans la définition de $\underline{\varphi}(\tilde{L}_1,\tilde{L}_2)$ pour lesquels on ait $d_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(\tilde{M}_1,\tilde{M}_2)\neq 0$ et il n'y a pas de $\tilde{L}$ intervenant dans la définition de $\underline{\varphi}'(\tilde{L}_1,\tilde{L}_2)$ pour lequel $d_{\tilde{M}}^{\tilde{L}}(\tilde{L}_1,\tilde{L}_2)\neq 0$. On suppose donc que (17) est vérifiée. Il y a alors un unique $\tilde{L}$ intervenant dans la définition de $\underline{\varphi}'(\tilde{L}_1,\tilde{L}_2)$ pour lequel $d_{\tilde{M}}^{\tilde{L}}(\tilde{L}_1,\tilde{L}_2)\neq 0$ : celui pour lequel

$$\mathcal{A}_{\tilde{L}}=\mathcal{A}_{\tilde{L}_1}\cap\mathcal{A}_{\tilde{L}_2},$$

cf. 5.3. Dans la suite $\tilde{L}$ désigne cet ensemble de Levi.

Supposons $\tilde{L}_1=\tilde{L}_2=\tilde{G}$. L'égalité (17) entraîne $\tilde{M}=\tilde{G}$ et on vérifie que les deux membres de (16) sont simplement égaux à $f_1\boxtimes f_2$. Supposons par exemple $\tilde{L}_1=\tilde{G}$ et $\tilde{L}_2\neq\tilde{G}$. L'égalité (17) entraîne $\tilde{L}_2=\tilde{M}$. On a aussi $\tilde{L}=\tilde{G}$. D'où $\underline{\varphi}'(\tilde{G},\tilde{M})=f_1\boxtimes f_{2,\tilde{M}}$. Seul le couple $(\tilde{M}_1,\tilde{M}_2)=(\tilde{G},\tilde{M})$ contribue à la définition de $\underline{\varphi}(\tilde{G},\tilde{M})$, d'où $\underline{\varphi}(\tilde{G},\tilde{M})=f_1\boxtimes\phi_{\tilde{M}}^{\tilde{M}}(f_{2,\tilde{P}_2})=f_1\boxtimes f_{2,\tilde{M}}$, d'où (16) dans ce cas.

On suppose maintenant $\tilde{L}_1$ et $\tilde{L}_2$ tous deux différents de $\tilde{G}$. Les deux termes de (16) appartiennent à $I_{ac}(\tilde{L}_1(F),\omega)\boxtimes I_{ac}(\tilde{L}_2(F),\omega)$. Pour prouver (16), on peut fixer pour $i=1,2$ une $\omega$-représentation tempérée $\tilde{\pi}_i$ de $\tilde{L}_i(F)$ et un élément $X_i\in\tilde{\mathcal{A}}_{\tilde{L}_i}$ et prouver que la forme linéaire

$$(18)\qquad \varphi_1\boxtimes\varphi_2\mapsto\overline{I_{\tilde{L}_1}(\tilde{\pi}_1,X_1,\varphi_1)}I_{\tilde{L}_2}(\tilde{\pi}_2,X_2,\varphi_2)$$

prend la même valeur sur les deux membres. Sa valeur sur $\underline{\varphi}(\tilde{L}_1, \tilde{L}_2)$ est

$$\sum_{\tilde{M}_1 \in \mathcal{L}(\tilde{L}_1), \tilde{M}_2 \in \mathcal{L}(\tilde{L}_2)} d_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(\tilde{M}_1, \tilde{M}_2) \overline{I_{\tilde{L}_1}(\tilde{\pi}_1, X_1, \phi_{\tilde{L}_1}^{\tilde{M}_i}(f_{1,\tilde{\bar{P}}_1}))} I_{\tilde{L}_2}(\tilde{\pi}_2, X_2, \phi_{\tilde{L}_2}^{\tilde{M}_i}(f_{2,\tilde{\bar{P}}_2})).$$

En utilisant les définitions des applications $\phi_{\tilde{L}_i}^{\tilde{M}_i}$, on obtient

$$\sum_{\tilde{M}_1 \in \mathcal{L}(\tilde{L}_1), \tilde{M}_2 \in \mathcal{L}(\tilde{L}_2)} d_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(\tilde{M}_1, \tilde{M}_2) \overline{J_{\tilde{L}_1}^{\tilde{M}_i}(\tilde{\pi}_1, X_1, f_{1,\tilde{\bar{P}}_1})} J_{\tilde{L}_2}^{\tilde{M}_i}(\tilde{\pi}_2, X_2, f_{2,\tilde{\bar{P}}_2}).$$

C'est la valeur en $(-X_1, X_2)$ (le signe $-$ provenant de la conjugaison complexe figurant dans la formule ci-dessus) de la transformée de Fourier de la fonction sur $i\tilde{\mathcal{A}}^*_{\tilde{L}_1,F} \times i\tilde{\mathcal{A}}^*_{\tilde{L}_2,F}$ qui, à $(\tilde{\lambda}_1, \tilde{\lambda}_2)$, associe

$$\sum_{\tilde{M}_1 \in \mathcal{L}(\tilde{L}_1), \tilde{M}_2 \in \mathcal{L}(\tilde{L}_2)} d_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(\tilde{M}_1, \tilde{M}_2) \overline{J_{\tilde{L}_1}^{\tilde{M}_i}(\tilde{\pi}_{1,\tilde{\lambda}_1}, f_{1,\tilde{\bar{P}}_1})} J_{\tilde{L}_2}^{\tilde{M}_i}(\tilde{\pi}_{2,\tilde{\lambda}_2}, f_{2,\tilde{\bar{P}}_2}).$$

Fixons des espaces paraboliques $\tilde{Q}_i \in \mathcal{P}(\tilde{L}_i)$ pour $i = 1, 2$ contenus dans des espaces paraboliques d'espaces de Levi $\tilde{L}$ et introduisons les représentations induites $\tilde{\Pi}_{i,\tilde{\lambda}_i} = Ind_{\tilde{Q}_i}^{\tilde{G}}(\tilde{\pi}_{i,\tilde{\lambda}_i})$ dans l'espace $V_i = V_{\pi_i,\tilde{Q}_i}$. On dispose des $(\tilde{G}, \tilde{L}_i)$-familles à valeurs opérateurs $(\mathcal{M}(\pi_{i,\lambda_i}; \Lambda, \tilde{Q}))_{\tilde{Q} \in \mathcal{P}(\tilde{L}_i)}$. On vérifie que l'expression précédente n'est autre que

$$(19) \qquad trace(\mathcal{N}(\lambda_1, \lambda_2)(\tilde{\Pi}_{1,\tilde{\lambda}_1}(f_1) \boxtimes \tilde{\Pi}_{2,\tilde{\lambda}_2}(f_2)),$$

où $\mathcal{N}(\lambda_1, \lambda_2)$ est l'opérateur de $V_1 \boxtimes V_2$ défini par

$$\mathcal{N}(\lambda_1, \lambda_2) = \sum_{\tilde{M}_1 \in \mathcal{L}(\tilde{L}_1), \tilde{M}_2 \in \mathcal{L}(\tilde{L}_2)} d_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(\tilde{M}_1, \tilde{M}_2) \mathcal{M}_{\tilde{L}_1}^{\tilde{\bar{P}}_1}(\pi_{1,\lambda_1}) \boxtimes \mathcal{M}_{\tilde{L}_2}^{\tilde{P}_2}(\pi_{2,\lambda_2}).$$

Pour calculer la valeur sur $\underline{\varphi}'(\tilde{L}_1, \tilde{L}_2)$ de la forme linéaire (18), on doit d'abord calculer $I_{\tilde{L}_i}(\tilde{\pi}_i, X_i, \varphi_{i,\tilde{L}_i})$ pour $\varphi_i \in \mathcal{H}_{ac}(\tilde{L}(F))$. On introduit une fonction $b \in C_c^\infty(\tilde{\mathcal{A}}_{\tilde{L},F})$ telle que $b(\tilde{H}_{\tilde{L}}(X_i)) = 1$. On a alors

$$I_{\tilde{L}_i}(\tilde{\pi}_i, X_i, \varphi_{i,\tilde{L}_i}) = I_{\tilde{L}_i}(\tilde{\pi}_i, X_i, \varphi_{i,\tilde{L}_i}(b \circ \tilde{H}_{\tilde{L}})) = I_{\tilde{L}_i}(\tilde{\pi}_i, X_i, (\varphi_i(b \circ \tilde{H}_{\tilde{L}}))_{\tilde{L}_i}).$$

Maintenant, $\varphi_i(b \circ \tilde{H}_{\tilde{L}})$ est à support compact, d'où

$$I_{\tilde{L}_i}(\tilde{\pi}_i, X_i, (\varphi_i(b \circ \tilde{H}_{\tilde{L}}))_{\tilde{L}_i}) = mes(i\mathcal{A}^*_{\underline{\tilde{M}}_i,F})^{-1} \int_{i\mathcal{A}^*_{\tilde{L}_i,F}} I_{\tilde{L}_i}(\tilde{\pi}_{i,\tilde{\lambda}_i}, (\varphi_i(b \circ \tilde{H}_{\tilde{L}}))_{\tilde{L}_i}) e^{-<\tilde{\lambda}_i, X_i>} \, d\lambda_i.$$

En introduisant la représentation $\tilde{\pi}_{i,\tilde{\lambda}_i}^{\tilde{L}} = Ind_{\tilde{Q}_i \cap \tilde{L}}^{\tilde{L}}(\tilde{\pi}_{i,\tilde{\lambda}_i})$, l'expression ci-dessus devient

$$mes(i\mathcal{A}^*_{\underline{\tilde{M}}_i,F})^{-1} \int_{i\mathcal{A}^*_{\tilde{L}_i,F}} I_{\tilde{L}}(\tilde{\pi}_{i,\tilde{\lambda}_i}^{\tilde{L}}, \varphi_i(b \circ \tilde{H}_{\tilde{L}})) e^{-<\tilde{\lambda}_i, X_i>} \, d\lambda_i.$$

On peut aussi l'écrire

$$mes(i\mathcal{A}^*_{\underline{\tilde{M}}_i,F})^{-1} \int_{i\mathcal{A}^*_{\tilde{L}_i,F}} \int_{\tilde{\mathcal{A}}_{\tilde{L},F}} I_{\tilde{L}}(\tilde{\pi}_{i,\tilde{\lambda}_i}^{\tilde{L}}, Y_i, \varphi_i(b \circ \tilde{H}_{\tilde{L}})) \, dY_i \, e^{-<\tilde{\lambda}_i, X_i>} \, d\lambda_i,$$

puis, par inversion de Fourier,

$$mes(i\mathcal{A}^*_{\underline{\tilde{M}}_i,F})^{-1}mes(i\mathcal{A}^*_{\tilde{L},F})\int_{i\mathcal{A}^*_{\tilde{L}_i,F}/i\mathcal{A}^*_{\tilde{L},F}} I_{\tilde{L}}(\tilde{\pi}^{\tilde{L}}_{i,\tilde{\lambda}_i}, X_{i,\tilde{L}}, \varphi_i(b\circ \tilde{H}_{\tilde{L}}))e^{-<\tilde{\lambda}_i,X_i>}\,d\lambda_i,$$

où $X_{i,\tilde{L}}$ est la projection de $X_i$ dans $\tilde{\mathcal{A}}_{\tilde{L},F}$. Maintenant, on peut faire disparaître la fonction $(b\circ \tilde{H}_{\tilde{L}})$ et on obtient simplement

$$mes(i\mathcal{A}^*_{\underline{\tilde{M}}_i,F})^{-1}mes(i\mathcal{A}^*_{\tilde{L},F})\int_{i\mathcal{A}^*_{\tilde{L}_i,F}/i\mathcal{A}^*_{\tilde{L},F}} I_{\tilde{L}}(\tilde{\pi}^{\tilde{L}}_{i,\tilde{\lambda}_i}, X_{i,\tilde{L}}, \varphi_i)e^{-<\tilde{\lambda}_i,X_i>}\,d\lambda_i.$$

En appliquant ce calcul et les définitions, on obtient que la valeur sur $\underline{\varphi}'(\tilde{L}_1,\tilde{L}_2)$ de la forme linéaire (18) est

$$(20)\qquad mes(i\mathcal{A}^*_{\underline{\tilde{M}}_1,F})^{-1}mes(i\mathcal{A}^*_{\underline{\tilde{M}}_2,F})^{-1}mes(i\mathcal{A}^*_{\tilde{L},F})^2\int_{i\mathcal{A}^*_{\tilde{L}_1,F}/i\mathcal{A}^*_{\tilde{L},F}}\int_{i\mathcal{A}^*_{\tilde{L}_2,F}/i\mathcal{A}^*_{\tilde{L},F}}$$

$$I_{\tilde{L}}(\tilde{\pi}^{\tilde{L}}_{1,\tilde{\lambda}_1}\boxtimes\tilde{\pi}^{\tilde{L}}_{2,\tilde{\lambda}_2}, X_{1,\tilde{L}}, X_{2,\tilde{L}}, \underline{\phi}_{\tilde{L}}(\underline{f}))e^{<\tilde{\lambda}_1,X_1>-<\tilde{\lambda}_2,X_2>}\,d\lambda_1\,d\lambda_2,$$

où on a noté $\underline{\varphi}\mapsto I_{\tilde{L}}(\tilde{\pi}^{\tilde{L}}_{1,\tilde{\lambda}_1}\boxtimes\tilde{\pi}^{\tilde{L}}_{2,\tilde{\lambda}_2}, X_{1,\tilde{L}}, X_{2,\tilde{L}}, \underline{\varphi})$ la forme linéaire

$$\varphi_1\boxtimes\varphi_2\mapsto \overline{I_{\tilde{L}}(\tilde{\pi}^{\tilde{L}}_{1,\tilde{\lambda}_1}, X_{1,\tilde{L}}, \varphi_1)}I_{\tilde{L}}(\tilde{\pi}^{\tilde{L}}_{2,\tilde{\lambda}_2}, X_{2,\tilde{L}}, \varphi_2)$$

sur $\underline{H}_{ac}(\tilde{L}(F))$. Mais on a calculé la composée de $\underline{\phi}_{\tilde{L}}$ avec cette forme linéaire dans la preuve suivant la relation (2). Le résultat est le suivant. On déduit des $(\tilde{G},\tilde{L}_i)$-familles $(\mathcal{M}(\pi_{i,\lambda'_i};\Lambda,\tilde{Q}))_{\tilde{Q}\in\mathcal{P}(\tilde{L}_i)}$ (où $\lambda'_i\in i\mathcal{A}^*_{\tilde{L}_i,F}$) des $(\tilde{G},\tilde{L})$-familles et on introduit leur produit sesquilinéaire

$$\mathcal{M}(\pi_{1,\lambda'_1}\boxtimes\pi_{2,\lambda'_2};\Lambda,\tilde{Q}) = \mathcal{M}(\pi_{1,\lambda'_1};\Lambda,\tilde{Q})\boxtimes\mathcal{M}(\pi_{2,\lambda'_2};\Lambda,\tilde{Q})$$

pour $\tilde{Q}\in\mathcal{P}(\tilde{L})$. On pose

$$\mathcal{N}'(\lambda'_1,\lambda'_2) = \mathcal{M}^{\tilde{G}}_{\tilde{L}}(\pi_{1,\lambda'_1}\boxtimes\pi_{2,\lambda'_2};0).$$

Alors $I_{\tilde{L}}(\tilde{\pi}^{\tilde{L}}_{1,\tilde{\lambda}_1}\boxtimes\tilde{\pi}^{\tilde{L}}_{2,\tilde{\lambda}_2}, X_{1,\tilde{L}}, X_{2,\tilde{L}}, \underline{\phi}_{\tilde{L}}(\underline{f}))$ est la valeur en $(-X_1,X_2)$ de la transformée de Fourier de la fonction

$$(\tilde{\mu}_1,\tilde{\mu}_2)\mapsto trace(\mathcal{N}'(\lambda_1+\mu_1,\lambda_2+\mu_2)(\tilde{\Pi}_{1,\tilde{\lambda}_1+\tilde{\mu}_1}(f_1)\boxtimes\tilde{\Pi}_{2,\tilde{\lambda}_2+\tilde{\mu}_2}(f_2)))$$

sur $i\tilde{\mathcal{A}}^*_{\tilde{L},F}\times i\tilde{\mathcal{A}}^*_{\tilde{L},F}$. En insérant cette valeur dans l'expression (20), on voit que la valeur de la forme linéaire (18) sur $\underline{\varphi}'(\tilde{L}_1,\tilde{L}_2)$ est la valeur en $(-X_1,X_2)$ de la transformée de Fourier de la fonction sur sur $i\tilde{\mathcal{A}}^*_{\tilde{L}_1,F}\times i\tilde{\mathcal{A}}^*_{\tilde{L}_2,F}$ qui, à $(\tilde{\lambda}_1,\tilde{\lambda}_2)$, associe

$$(21)\qquad trace(\mathcal{N}'(\lambda_1,\lambda_2)(\tilde{\Pi}_{1,\tilde{\lambda}_1}(f_1)\boxtimes\tilde{\Pi}_{2,\tilde{\lambda}_2}(f_2))$$

sur $i\tilde{\mathcal{A}}^*_{\tilde{L}_1,F}\times i\tilde{\mathcal{A}}^*_{\tilde{L}_2,F}$.

On a montré que les valeurs de la forme linéaire (18) sur les deux membres de (16) étaient les valeurs en $(-X_1,X_2)$ des transformées de Fourier des fonctions en $(\tilde{\lambda}_1,\tilde{\lambda}_2)$

définies par (19) et (21). Pour démontrer leur égalité, il suffit de prouver l'égalité de ces dernières expressions. Il suffit encore de prouver l'égalité

$$\mathcal{N}(\lambda_1,\lambda_2)=\mathcal{N}'(\lambda_1,\lambda_2).$$

Mais c'est ce qu'affirme la relation 5.3(1) simplifiée dans notre situation comme expliqué dans ce paragraphe (et étendue aux familles à valeurs opérateurs, ce qui ne pose pas de difficulté). Cela achève la preuve. $\square$

## 6.7 Variante avec caractère central

Pour tout sous-groupe $H$ de $G$ contenant $A_{\tilde{G}}$, on pose $\underline{H}=A_{\tilde{G}}\backslash H$. Pour tout sous-variété $\tilde{H}$ de $\tilde{G}$ invariante par translations par $A_{\tilde{G}}$, on pose $\underline{\tilde{H}}=A_{\tilde{G}}\backslash\tilde{H}$. On a simplement $\underline{H}(F)=A_{\tilde{G}}(F)\backslash H(F)$, $\underline{\tilde{H}}(F)=A_{\tilde{G}}(F)\backslash\tilde{H}(F)$ puisque $A_{\tilde{G}}$ est déployé donc cohomologiquement trivial.

Pour une fonction $f$ sur $\tilde{G}(F)$ et pour $z\in A_{\tilde{G}}(F)$, définissons la fonction $f^{[z]}$ par $f^{[z]}(\gamma)=f(z\gamma)=f(\gamma z)$. Soit $\mu$ un caractère unitaire de $A_{\tilde{G}}(F)$. On note $C^\infty_\mu(\tilde{G}(F),K)$ l'espace des fonctions $f:\tilde{G}(F)\to\mathbb{C}$ qui sont lisses, $K$-finies à droite et à gauche, qui vérifient la relation $f^{[z]}=\mu(z)^{-1}f$ et dont le support est compact modulo $A_{\tilde{G}}(F)$. Soit $\pi$ une représentation irréductible et unitaire de $G(F)$. Pour $z\in A_{\tilde{G}}(F)$, $\pi(z)$ est une homothétie dont on note $\mu_\pi(z)$ le rapport. L'application $z\mapsto\mu_\pi(z)$ est un caractère unitaire. Appelons-le le $A$-caractère central de $\pi$. Soit maintenant $\tilde{\pi}$ une $\omega$-représentation unitaire de $\tilde{G}(F)$, de longueur finie. Supposons que toutes les composantes irréductibles de la représentation sous-jacente $\pi$ aient le même $A$-caractère central. On dit alors que c'est le $A$-caractère central de $\tilde{\pi}$. Supposons qu'il en soit ainsi et que ce caractère soit $\mu$. On peut alors définir l'opérateur $\tilde{\pi}(f)$ pour $f\in C^\infty_\mu(\tilde{G}(F),K)$ par

$$\tilde{\pi}(f)=\int_{A_{\tilde{G}}(F)\backslash\tilde{G}(F)}f(g)\tilde{\pi}(g)\,dg.$$

On définit aussi sa trace $I_{\underline{\tilde{G}}}(\tilde{\pi},f)=trace(\tilde{\pi}(f))$. Pour $\boldsymbol{\tau}\in\mathcal{E}(\tilde{G},\omega)$, la représentation $\tilde{\pi}_{\boldsymbol{\tau}}$ n'est pas $G$-irréductible, mais admet un $A$-caractère central, qui ne dépend bien sûr que de l'image $\tau$ de $\boldsymbol{\tau}$ dans $E(\tilde{G},\omega)$. Notons-le $\mu_\tau$. On note $E_{disc,\mu}(\tilde{G},\omega)$ l'ensemble des $\tau\in E_{disc}(\tilde{G},\omega)$ tels que $\mu_\tau=\mu$. On note $E_{disc,\mu}(\tilde{G},\omega)/conj$ l'ensemble des classes de conjugaison par $G(F)$ dans $E_{disc,\mu}(\tilde{G},\omega)$. Pour $\tau=(M,\sigma,\tilde{r})\in E_{disc,\mu}(\tilde{G},\omega)$ (ou $E_{disc,\mu}(\tilde{G},\omega)/conj$), notons $Stab(W^G,\tau)$ le stabilisateur de $\tau$ dans $W^G$, puis, comme en 2.9,

$$\mathbf{Stab}(W^G,\tau)=(Stab(W^G,\tau)/W^M)/W_0^G(\sigma).$$

Pour $f_1,f_2\in C^\infty_\mu(\tilde{G},K)$, posons

$$I^{\tilde{G}}_{\underline{disc}}(\omega,f_1,f_2)=\sum_{\tau\in E_{disc,\mu}(\tilde{G},\omega)/conj}|\mathbf{Stab}(W^G,\tau)|^{-1}\iota(\tau)\overline{I_{\underline{\tilde{G}}}(\tilde{\pi}_{\boldsymbol{\tau}},f_1)}I_{\underline{\tilde{G}}}(\tilde{\pi}_{\boldsymbol{\tau}},f_1).$$

Soient $\tilde{M}\in\mathcal{L}(\tilde{M}_0)$ et $\tilde{S}\in T_{ell}(\tilde{M})$. On dispose de mesures sur $S^{\theta,0}(F)$ et sur $A_{\tilde{G}}(F)$, donc aussi sur $A_{\tilde{G}}(F)\backslash S^{\theta,0}(F)=\underline{S}^{\theta,0}(F)$. Comme en 4.1, on munit $\tilde{S}(F)/A_{\tilde{G}}(F)(1-\theta)(S(F))=\underline{\tilde{S}}(F)/(1-\theta)(\underline{S}(F))$ de la mesure telle que, pour tout $\gamma\in\tilde{S}(F)$, l'application

$$\begin{array}{ccc}\underline{S}^{\theta,0}(F)&\to&\underline{\tilde{S}}(F)/(1-\theta)(\underline{S}(F))\\ t&\mapsto&t\gamma\end{array}$$

préserve localement les mesures au voisinage de l'origine. Supposons $\omega$ trivial sur $S^\theta(F)$. Remarquons que $C_\mu^\infty(\tilde{G},K)\subset\mathcal{H}_{ac}(\tilde{G})$. Les intégrales pondérées équivariantes de 6.5 sont donc définies pour $f_1$ et $f_2$ et $\gamma\in\tilde{S}(F)\cap\tilde{G}_{reg}(F)$, ainsi que les termes $I_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(\gamma,\omega,f_1,f_2)$ de 6.6. On vérifie que

$$I_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(z\gamma,\omega,f_1,f_2)=I_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(\gamma,\omega,f_1,f_2)$$

pour tout $z\in A_{\tilde{G}}(F)$. Remarquons que l'inclusion $A_{\tilde{G}}(F)\backslash S^\theta(F)\subset\underline{S}^\theta(F)$ n'est pas forcément une égalité. On pose

$$I_{\underline{\tilde{M}}}^{\underline{\tilde{G}}}(\gamma,\omega,f_i)=[\underline{S}^\theta(F):(A_{\tilde{G}}(F)\backslash S^\theta(F))]^{-1}I_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(\gamma,\omega,f_i)$$

pour $i=1,2$ et

$$I_{\underline{\tilde{M}}}^{\underline{\tilde{G}}}(\gamma,\omega,f_1,f_2)=[\underline{S}^\theta(F):(A_{\tilde{G}}(F)\backslash S^\theta(F))]^{-2}I_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(\gamma,\omega,f_1,f_2).$$

**Remarque.** On a défini les intégrales orbitales comme des intégrales sur $S^\theta(F)\backslash G(F)$. On doit ici les convertir en intégrales sur $\underline{S}^\theta(F)\backslash\underline{G}(F)$, ce qui justifie les facteurs introduits ci-dessus.

On pose, au moins formellement,

$$(1)\qquad I_{\underline{\tilde{M}},\underline{\tilde{S}}}^{\underline{\tilde{G}}}(\omega,f_1,f_2)=|W^M(\tilde{S})|^{-1}mes(A_{\underline{\tilde{M}}}(F)\backslash\underline{S}^\theta(F))$$
$$\int_{\tilde{S}(F)/A_{\tilde{G}}(F)(1-\theta)(S(F))}I_{\underline{\tilde{M}}}^{\underline{\tilde{G}}}(\gamma,\omega,f_1,f_2)\,d\gamma.$$

Comme en 6.6, on définit ensuite

$$I_{\underline{\tilde{M}},géom}^{\underline{\tilde{G}}}(\omega,f_1,f_2)=\sum_{\tilde{S}\in T_{ell}(\tilde{M},\omega)}I_{\underline{\tilde{M}},\underline{\tilde{S}}}^{\underline{\tilde{G}}}(\omega,f_1,f_2)$$

et

$$I_{géom}^{\underline{\tilde{G}}}(\omega,f_1,f_2)=\sum_{\tilde{M}\in\mathcal{L}(\tilde{M}_0)}|\tilde{W}^M||\tilde{W}^G|^{-1}(-1)^{a_{\tilde{M}}-a_{\tilde{G}}}I_{\underline{\tilde{M}},géom}^{\underline{\tilde{G}}}(\omega,f_1,f_2).$$

**Théorème**. *Pour $f_1,f_2\in C_\mu^\infty(\tilde{G}(F),K)$, les expressions (1) sont absolument convergentes. On a l'égalité*

$$I_{géom}^{\underline{\tilde{G}}}(\omega,f_1,f_2)=I_{spec}^{\underline{\tilde{G}}}(\omega,f_1,f_2).$$

Preuve. On ne détaillera que l'aspect combinatoire de la preuve. On note

$$p_\mu:C_c^\infty(\tilde{G}(F),K)\to C_\mu^\infty(\tilde{G}(F),K)$$

l'application qui, à $\varphi\in C_c^\infty(\tilde{G}(F),K)$, associe la fonction $f$ définie par

$$f(\gamma)=\int_{A_{\tilde{G}}(F)}f(z\gamma)\mu(z)\,dz.$$

Elle est surjective. Ainsi on peut introduire pour $i=1,2$ une fonction $\varphi_i\in C_c^\infty(\tilde{G}(F),K)$ telle que $p_\mu(\varphi_i)=f_i$. Le théorème 6.6 nous fournit l'égalité

$$I^{\tilde{G}}_{g\acute{e}om}(\omega,\varphi_1,\varphi_2^{[z]})=I^{\tilde{G}}_{spec}(\omega,\varphi_1,\varphi_2^{[z]})$$

pour tout $z\in A_{\tilde{G}}(F)$. On vérifie que le membre de gauche (donc aussi celui de droite) est à support compact en $z$ et borné. On a donc l'égalité

$$(2)\qquad \int_{A_{\tilde{G}}(F)} I^{\tilde{G}}_{g\acute{e}om}(\omega,\varphi_1,\varphi_2^{[z]})\mu(z)\,dz\;=\int_{A_{\tilde{G}}(F)} I^{\tilde{G}}_{spec}(\omega,\varphi_1,\varphi_2^{[z]})\mu(z)\,dz.$$

On va montrer que le membre de gauche est égal à $I^{\underline{\tilde{G}}}_{g\acute{e}om}(\omega,f_1,f_2)$, tandis que celui de droite est égal à $I^{\underline{\tilde{G}}}_{spec}(\omega,f_1,f_2)$.

Commençons par les termes géométriques. On peut fixer $\tilde{M}\in\mathcal{L}(\tilde{M}_0)$ et $\tilde{S}\in T_{ell}(\tilde{M},\omega)$ et prouver l'égalité

$$(3)\qquad mes(A_{\tilde{M}}(F)\backslash S^\theta(F))\int_{A_{\tilde{G}}(F)}\int_{\tilde{S}(F)/(1-\theta)(S(F))} I^{\tilde{G}}_{\tilde{M}}(\gamma,\omega,\varphi_1,\varphi_2^{[z]})\,d\gamma\,dz=$$

$$mes(A_{\underline{\tilde{M}}}(F)\backslash \underline{S}^\theta(F))\int_{\underline{\tilde{S}}(F)/(1-\theta)(\underline{S}(F))} I^{\underline{\tilde{G}}}_{\underline{\tilde{M}}}(\gamma,\omega,f_1,f_2)\,d\gamma.$$

Il existe une constante $C>0$ telle que l'on ait la formule d'intégration

$$(4)\qquad \int_{\tilde{S}(F)/(1-\theta)(S(F))}\phi(\gamma)\,d\gamma\;=C\int_{\underline{\tilde{S}}(F)/(1-\theta)(\underline{S}(F))}\int_{A_{\tilde{G}}(F)}\phi(z'\gamma)\,dz'\,d\gamma$$

pour toute fonction intégrable $\phi$ sur $\tilde{S}(F)/(1-\theta)(S(F))$. Le membre de gauche de (3) devient

$$Cmes(A_{\tilde{M}}(F)\backslash S^\theta(F))\int_{\underline{\tilde{S}}(F)/(1-\theta)(\underline{S}(F))}\int_{A_{\tilde{G}}(F)}\int_{A_{\tilde{G}}(F)} I^{\tilde{G}}_{\tilde{M}}(z'\gamma,\omega,\varphi_1,\varphi_2^{[z]})\,dz'\,dz\,d\gamma.$$

On vérifie que

$$I^{\tilde{G}}_{\tilde{M}}(z'\gamma,\omega,\varphi_1,\varphi_2^{[z]})=I^{\tilde{G}}_{\tilde{M}}(\gamma,\omega,\varphi_1^{[z']},\varphi_2^{[z'z]}),$$

puis que

$$\int_{A_{\tilde{G}}(F)}\int_{A_{\tilde{G}}(F)} I^{\tilde{G}}_{\tilde{M}}(z'\gamma,\omega,\varphi_1,\varphi_2^{[z]})\,dz'\,dz=[\underline{S}^\theta(F):(A_{\tilde{G}}(F)\backslash S^\theta(F))]^2 I^{\underline{\tilde{G}}}_{\underline{\tilde{M}}}(\gamma,\omega,f_1,f_2).$$

Alors le membre de gauche de (3) devient celui de droite, à ceci près que la constante $mes(A_{\underline{\tilde{M}}}(F)\backslash\underline{S}^\theta(F))$ y est remplacée par $Cmes(A_{\tilde{M}}(F)\backslash S^\theta(F))[\underline{S}^\theta(F):(A_{\tilde{G}}(F)\backslash S^\theta(F))]^2$. Il reste à montrer que ces deux termes sont égaux, autrement dit, on doit calculer $C$. Fixons un point base $\gamma_0\in\tilde{S}(F)$, ce qui permet d'identifier $S(F)$ à $\tilde{S}(F)$ par $x\mapsto x\gamma_0$ et de même $\underline{S}(F)$ à $\underline{\tilde{S}}(F)$. Considérons le diagramme

$$\begin{array}{ccccc} & & S^{\theta,0}(F) & & \\ & \swarrow & & \searrow & \\ \underline{S}^{\theta,0}(F) & & & & S(F)/(1-\theta)(S(F)) \\ & \searrow & & \swarrow & \\ & & \underline{S}(F)/(1-\theta)(\underline{S}(F)) & & \end{array}$$

Pour chaque flèche

$$\begin{array}{ccc} & & X \\ & \swarrow & \\ Y & & \end{array}$$

de ce diagramme, on définit une application

$$\begin{array}{ccc} C_c^\infty(X) & \to & C_c^\infty(Y) \\ \psi_X & \mapsto & \psi_Y \end{array}$$

par

$$\psi_Y(y) = \int_{A_{\tilde{G}}(F)} \psi_X(zy_X)\, dz,$$

où $y_X$ est une image réciproque de $y$ dans $X$. Pour chaque flèche

$$\begin{array}{ccc} X & & \\ & \searrow & \\ & & Y \end{array}$$

de ce diagramme, on définit une application

$$\begin{array}{ccc} C_c^\infty(X) & \to & C_c^\infty(Y) \\ \psi_X & \mapsto & \psi_Y \end{array}$$

par $\psi_Y(y) = \sum_x \psi_X(x)$, où $x$ parcourt l'image réciproque de $y$ dans $X$. Soit $\psi \in C_c^\infty(S^{\theta,0}(F))$. En appliquant ces constructions au côté gauche, du diagramme, on déduit de $\psi$ une fonction $\psi_g$ sur $\underline{S}(F)/(1-\theta)(\underline{S}(F))$. En appliquant ces constructions au côté droit du diagramme, on obtient d'abord une fonction $\phi$ sur $S(F)/(1-\theta)(S(F))$, puis une fonction $\psi_d$ sur $\underline{S}(F)/(1-\theta)(\underline{S}(F))$. Appliquons (4) à $\phi$. Par définition de la mesure sur $S(F)/(1-\theta)(S(F))$, on a

$$\int_{S(F)/(1-\theta)(S(F))} \phi(\gamma)\, d\gamma = \int_{S^{\theta,0}(F)} \psi(\gamma)\, d\gamma.$$

Par définition de la mesure sur $\underline{S}(F)/(1-\theta)(\underline{S}(F))$, c'est aussi

$$\int_{\underline{S}(F)/(1-\theta)(\underline{S}(F))} \psi_g(\gamma)\, d\gamma.$$

L'intégrale intérieure du membre de droite de (4) n'est autre que $\psi_d(\gamma)$ et ce membre de droite est égal à

$$\int_{\underline{S}(F)/(1-\theta)(\underline{S}(F))} \psi_d(\gamma)\, d\gamma.$$

Les fonctions $\psi_d$ et $\psi_g$ sont proportionnelles et les calculs ci-dessus montrent que la constante $C$ est celle pour laquelle $\psi_g = C\psi_d$. L'action de $A_{\tilde{G}}(F)$ sur $S^{\theta,0}(F)$ est libre, tandis que celle sur $S(F)/(1-\theta)(S(F))$ se quotiente en une action libre de $A_{\tilde{G}}(F)/(A_{\tilde{G}}(F)\cap (1-\theta)(S(F)))$. Il résulte alors des définitions que $C = |A_{\tilde{G}}(F)\cap(1-\theta)(S(F))|^{-1}$. Pour $x \in \underline{S}^\theta(F)$, soit $y \in S(F)$ relevant $x$, posons $z = (1-\theta)y$. L'application $x \mapsto z$ envoie $\underline{S}^\theta(F)$ dans $A_{\tilde{G}}(F)\cap(1-\theta)(S(F))$. Parce que l'application $S^{\theta,0}(F) \to \underline{S}^{\theta,0}(F)$ est surjective, l'application précédente se quotiente en une application de $\underline{S}^\theta(F)/\underline{S}^{\theta,0}(F)$ dans $A_{\tilde{G}}(F)\cap(1-\theta)(S(F))$. On obtient une suite d'applications

$$1 \to S^\theta(F)/S^{\theta,0}(F) \to \underline{S}^\theta(F)/\underline{S}^{\theta,0}(F) \to A_{\tilde{G}}(F)\cap(1-\theta)(S(F)) \to 1.$$

On vérifie aisément que cette suite est exacte. Donc

$$|A_{\tilde{G}}(F)\cap(1-\theta)(S(F))| = [\underline{S}^\theta(F) : (A_{\tilde{G}}(F)\backslash S^\theta(F))] = [\underline{S}^\theta(F) : \underline{S}^{\theta,0}(F)][S^\theta(F) : S^{\theta,0}(F)]^{-1}.$$

D'autre part, on a les égalités

$$mes(A_{\underline{\tilde{M}}}(F)\backslash \underline{S}^\theta(F)) = [\underline{S}^\theta(F) : \underline{S}^{\theta,0}(F)]mes(A_{\underline{\tilde{M}}}(F)\backslash \underline{S}^{\theta,0}(F))$$

$$= [\underline{S}^\theta(F) : \underline{S}^{\theta,0}(F)]mes(A_{\tilde{M}}(F)\backslash S^{\theta,0}(F))$$

$$= [\underline{S}^\theta(F) : \underline{S}^{\theta,0}(F)][S^\theta(F) : S^{\theta,0}(F)]^{-1}mes(A_{\tilde{M}}(F)\backslash S^\theta(F)).$$

De ces calculs résulte l'égalité

$$C = mes(A_{\underline{\tilde{M}}}(F)\backslash \underline{S}^\theta(F))mes(A_{\tilde{M}}(F)\backslash S^\theta(F))^{-1}[\underline{S}^\theta(F) : (A_{\tilde{G}}(F)\backslash S^\theta(F))]^{-2}$$

que l'on voulait prouver. Cela achève la preuve de (3) et l'identification du membre de gauche de (2) avec $I^{\tilde{G}}_{g\acute{e}om}(\omega, f_1, f_2)$.

Montrons maintenant que le membre de droite de (2) est égal à $I^{\tilde{G}}_{spec}(\omega, f_1, f_2)$. Ce membre de droite est égal à

$$\sum_{\tau\in(E_{disc}(\tilde{G},\omega)/conj)/i\mathcal{A}^*_{\tilde{G},F}} |\mathbf{Stab}(W^G \times i\mathcal{A}^*_{\tilde{G},F}, \tau)|^{-1}\iota(\tau)$$

$$\int_{A_{\tilde{G}}(F)}\int_{i\mathcal{A}^*_{\tilde{G},F}} \overline{I_{\tilde{G}}(\tilde{\pi}_{\boldsymbol{\tau}_{\tilde{\lambda}}}, \varphi_1)} I_{\tilde{G}}(\tilde{\pi}_{\boldsymbol{\tau}_{\tilde{\lambda}}}, \varphi_2^{[z]})\, d\lambda\, \mu(z)\, dz.$$

On identifie $(E_{disc}(\tilde{G},\omega)/conj)/i\mathcal{A}^*_{\tilde{G},F}$ à un ensemble de représentants $\underline{E}$ dans $E_{disc}(\tilde{G},\omega)$. On a

$$I_{\tilde{G}}(\tilde{\pi}_{\boldsymbol{\tau}_{\tilde{\lambda}}}, \varphi_2^{[z]}) = I_{\tilde{G}}(\tilde{\pi}_{\boldsymbol{\tau}_{\tilde{\lambda}}}, \varphi_2)\mu_\tau(z)^{-1}e^{-<\lambda, H_{\tilde{G}}(z)>}.$$

L'intégrale sur le plus grand sous-groupe compact de $A_{\tilde{G}}(F)$ sélectionne les $\tau \in \underline{E}$ tels que $\mu_\tau$ coïncide avec $\mu$ sur ce sous-groupe. Notons $\underline{E}'$ ce sous-ensemble. L'expression ci-dessus devient

$$mes(A_{\tilde{G}}(F)_c)\sum_{\tau\in\underline{E}'} |\mathbf{Stab}(W^G \times i\mathcal{A}^*_{\tilde{G},F}, \tau)|^{-1}\iota(\tau)$$

$$\int_{\mathcal{A}_{A_{\tilde{G}},F}}\int_{i\mathcal{A}^*_{\tilde{G},F}} \overline{I_{\tilde{G}}(\tilde{\pi}_{\boldsymbol{\tau}_{\tilde{\lambda}}}, \varphi_1)} I_{\tilde{G}}(\tilde{\pi}_{\boldsymbol{\tau}_{\tilde{\lambda}}}, \varphi_2)\, d\lambda\, (\mu_\tau^{-1}\mu)(H)e^{-<\lambda,H>}\, dH,$$

où on a quotienté $\mu_\tau^{-1}\mu$ en un caractère de $\mathcal{A}_{A_{\tilde{G}},F}$. Par inversion de Fourier, on obtient le produit de

$$(5) \qquad mes(A_{\tilde{G}}(F)_c)mes(i\mathcal{A}^*_{\tilde{G},F})[\mathcal{A}_{G,F} : \mathcal{A}_{A_G,F}]^{-1}$$

et de

$$\sum_{\tau\in\underline{E}'} |\mathbf{Stab}(W^G \times i\mathcal{A}^*_{\tilde{G},F}, \tau)|^{-1}\iota(\tau) \sum_{\lambda\in\Lambda_\mu(\tau)} \overline{I_{\tilde{G}}(\tilde{\pi}_{\boldsymbol{\tau}_{\tilde{\lambda}}}, \varphi_1)} I_{\tilde{G}}(\tilde{\pi}_{\boldsymbol{\tau}_{\tilde{\lambda}}}, \varphi_2),$$

où $\Lambda_\mu(\tau)$ est l'ensemble des $\lambda \in i\mathcal{A}^*_{\tilde{G},F}$ tels que $\mu_{\tau_\lambda} = \mu$, ou encore tels que $\tau_\lambda \in E_{disc,\mu}(\tilde{G},\omega)$. L'expression (5) vaut 1 d'après les normalisations de 1.2. L'ensemble $\Lambda_\mu(\tau)$

est un espace principal homogène sous le groupe $i\mathcal{A}^\vee_{A_{\tilde{G}},F}/i\mathcal{A}^\vee_{\tilde{G},F}$. On vérifie que, pour $\lambda$ dans cet ensemble, on a l'égalité

$$I_{\tilde{G}}(\tilde{\pi}_{\boldsymbol{\tau}_{\tilde{\lambda}}}, \varphi_i) = I_{\underline{\tilde{G}}}(\tilde{\pi}_{\boldsymbol{\tau}_{\tilde{\lambda}}}, f_i)$$

pour $i = 1, 2$. Notons $\underline{X}$ l'ensemble des couples $(\tau, \lambda)$, où $\tau \in \underline{E}'$ et $\lambda \in \Lambda_\mu(\tau)$. Considérons l'application de $\underline{X}$ dans $E_{disc,\mu}(\tilde{G}, \omega)/conj$ qui, à $(\tau, \lambda) \in \underline{X}$, associe la classe de conjugaison de $\tau_\lambda$. On vérifie qu'elle est surjective. Notons $\underline{X}_\tau$ sa fibre au-dessus d'un élément $\tau \in E_{disc,\mu}(\tilde{G}, \omega)/conj$. A ce point, on a transformé le membre de droite de (2) en

$$(6) \qquad \sum_{\tau \in E_{disc,\mu}(\tilde{G},\omega)/conj} C(\tau)\overline{I_{\underline{\tilde{G}}}(\tilde{\pi}_{\boldsymbol{\tau}}, f_1)} I_{\underline{\tilde{G}}}(\tilde{\pi}_{\boldsymbol{\tau}}, f_1),$$

où

$$C(\tau) = \sum_{(\underline{\tau},\lambda) \in \underline{X}_\tau} |\mathbf{Stab}(W^G \times i\mathcal{A}^*_{\tilde{G},F}, \underline{\tau})|^{-1} \iota(\underline{\tau}).$$

Fixons $\tau \in E_{disc,\mu}(\tilde{G}, \omega)/conj$ que l'on relève en un élément de $E_{disc}(\tilde{G}, \omega)$. L'ensemble $\underline{X}_\tau$ est celui des $(\underline{\tau}, \lambda)$ tels que $\underline{\tau} \in \underline{E}'$, $\lambda \in \Lambda_\mu(\underline{\tau})$ et $\underline{\tau}_\lambda$ est conjugué à $\tau$. Cette relation entraîne que les images de $\tau$ et $\underline{\tau}$ dans $(E_{disc}(\tilde{G}, \omega)/conj)/i\mathcal{A}^*_{\tilde{G},F}$ sont égales. Donc $\underline{\tau}$ est bien déterminé : c'est l'élément de $\underline{E}'$ qui représente l'image de $\tau$ dans $(E_{disc}(\tilde{G}, \omega)/conj)/i\mathcal{A}^*_{\tilde{G},F}$. Cela simplifie $C(\tau)$ en

$$C(\tau) = |\underline{X}_\tau||\mathbf{Stab}(W^G \times i\mathcal{A}^*_{\tilde{G},F}, \tau)|^{-1} \iota(\tau).$$

On peut fixer $\underline{\lambda} \in i\mathcal{A}^*_{\tilde{G},F}$ tel que $\underline{\tau}_{\underline{\lambda}}$ soit conjugué à $\tau$. Notons $\Lambda'(\tau)$ l'ensemble des $\lambda \in i\mathcal{A}^*_{\tilde{G},F}$ tels que $\tau_\lambda$ soit conjugué à $\tau$. Alors $\underline{X}_\tau$ est l'ensemble des $(\underline{\tau}, \underline{\lambda} + \lambda)$ pour $\lambda \in \Lambda'(\tau)$. D'où $|\underline{X}_\tau| = |\Lambda'(\tau)|$. Remarquons que $\tau$ et $\tau_\lambda$ sont conjugués par $G(F)$ si et seulement s'ils le sont par $W^G$. On a défini le groupe $Stab(W^G \times i\mathcal{A}^*_{\tilde{G},F}, \tau)$ en 2.9, formé des $(w, \lambda) \in Stab(W^G \times i\mathcal{A}^*_{\tilde{G},F}, \tau)$ tels que $w\tau = \tau_\lambda$. L'application qui, à $(w, \lambda)$, associe $\lambda$ fournit une suite exacte

$$1 \to Stab(W^G, \tau) \to Stab(W^G \times i\mathcal{A}^*_{\tilde{G},F}, \tau) \to \Lambda'(\tau) \to 1.$$

On en déduit aisément

$$|\Lambda'(\tau)| = |\mathbf{Stab}(W^G \times i\mathcal{A}^*_{\tilde{G},F}, \tau)||\mathbf{Stab}(W^G, \tau)|^{-1}.$$

D'où

$$C(\tau) = |\mathbf{Stab}(W^G, \tau)|^{-1} \iota(\tau).$$

Alors (6) devient $I^{\tilde{G}}_{disc}(\omega, f_1, f_2)$. $\square$

# 7 Conséquences

## 7.1 Fonctions cuspidales

Rappelons que l'on note $\tilde{G}(F)_{ell}$ l'ensemble des éléments semi-simples réguliers et elliptiques de $\tilde{G}(F)$. Une fonction $f \in C_c^\infty(\tilde{G}(F), K)$ est dite cuspidale si et seulement si $I_{\tilde{G}}(\gamma, \omega, f) = 0$ pour tout $\gamma \in \tilde{G}_{reg}(F)$ tel que $\gamma \notin \tilde{G}(F)_{ell}$. Cela équivaut à ce que, pour tout espace parabolique $\tilde{P} = \tilde{M}U_P \in \mathcal{F}(\tilde{M}_0)$, avec $\tilde{P} \neq \tilde{G}$, l'image de $f_{\tilde{P}}$ dans $I(\tilde{M}(F), K^M, \omega)$ soit nulle (en convenant que cet espace lui-même est nul si $\omega$ n'est pas trivial sur $Z_M(F)^\theta$). Grâce au théorème 5.5, cela équivaut aussi à $I_{\tilde{G}}(Ind_{\tilde{P}}^{\tilde{G}}(\tilde{\pi}), f) = 0$ pour tout $\tilde{P}$ comme ci-dessus et toute $\omega$-représentation $\tilde{\pi}$ de $\tilde{M}(F)$, tempérée et de longueur finie. On note $I_{cusp}(\tilde{G}(F), K, \omega)$ l'image dans $I(\tilde{G}(F), K, \omega)$ de l'espace des fonctions cuspidales. D'après le théorème 6.2, de l'application $pw_{\tilde{G}}$ se déduit un isomorphisme $I_{cusp}(\tilde{G}(F), K, \omega) \simeq PW_{ell}(\tilde{G}, \omega)$.

Dans le cas où $f_2$ est cuspidale, le théorème 6.6 se simplifie. Pour $\tilde{M} \in \mathcal{L}(\tilde{M}_0)$, $\tilde{S} \in T_{ell}(\tilde{M}, \omega)$ et $\gamma \in \tilde{S}(F) \cap \tilde{G}_{reg}(F)$, on a simplement

$$I_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(\gamma, \omega, f_1, f_2) = \overline{I_{\tilde{G}}(\gamma, \omega, f_1)} I_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(\gamma, \omega, f_2).$$

En effet, dans la somme définissant le membre de gauche (cf. 6.6), les termes pour $\tilde{L}_2 \neq \tilde{G}$ sont nuls parce que $f_{2,\tilde{L}_2} = 0$. Si $\tilde{L}_2 = \tilde{G}$, on a $\tilde{L}_1 = \tilde{M}$ et $I_{\tilde{M}}^{\tilde{M}}(\gamma, \omega, f_{1,\tilde{M}}) = I_{\tilde{G}}(\gamma, \omega, f_1)$. D'autre part, on a

$$I_{disc}^{\tilde{G}}(\omega, f_1, f_2) = \sum_{\tau \in (E_{ell}(\tilde{G}, \omega)/conj)/i\mathcal{A}_{\tilde{G},F}^*} |\mathbf{Stab}(W^G \times i\mathcal{A}_{\tilde{G},F}^*, \tau)|^{-1} \iota(\tau)$$

$$\int_{i\mathcal{A}_{\tilde{G},F}^*} \overline{I_{\tilde{G}}(\tilde{\pi}_{\boldsymbol{\tau}_{\tilde{\lambda}}}, f_1)} I_{\tilde{G}}(\tilde{\pi}_{\boldsymbol{\tau}_{\tilde{\lambda}}}, f_2)\, d\lambda.$$

En effet, si $\tau \in E_{disc}(\tilde{G}(F)) - E_{ell}(\tilde{G}(F))$, une représentation $\tilde{\pi}_{\boldsymbol{\tau}_{\tilde{\lambda}}}$ est induite à partir d'un espace parabolique propre (cf. lemmes 2.10 et 2.11), donc son caractère annule $f_2$. Remarquons que, pour un triplet $\tau = (M_{disc}, \sigma, \tilde{r}) \in E_{ell}(\tilde{G}(F))$, on a simplement

$$\iota(\tau) = |det((1 - \tilde{r})_{|\mathcal{A}_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}})|^{-1},$$

puisque $W_0^G(\sigma) = \{1\}$.

Rappelons que les caractères de $\omega$-représentations de longueur finie de $\tilde{G}(F)$ sont des distributions localement intégrables. Pour une telle $\omega$-représentation $\tilde{\pi}$, notons $\gamma \mapsto \Theta(\tilde{\pi}, \gamma)$ la fonction sur $\tilde{G}(F)$ telle que

$$I_{\tilde{G}}(\tilde{\pi}, f) = \int_{\tilde{G}(F)} \Theta(\tilde{\pi}, \gamma) f(\gamma)\, d\gamma.$$

On suppose, ainsi qu'il est loisible, que cette fonction est lisse sur $\tilde{G}_{reg}(F)$.

**Théorème**. *Soient $f \in C_c^\infty(\tilde{G}(F), K)$, $\tilde{M} \in \mathcal{L}(\tilde{M}_0)$ et $\gamma \in \tilde{M}(F) \cap \tilde{G}_{reg}(F)$. On suppose $f$ cuspidale. Alors*

*(i) si $\gamma \notin \tilde{M}(F)_{ell}$, $I_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(\gamma, \omega, f) = 0$ ;*

*(ii) si $\gamma \in \tilde{M}(F)_{ell}$,*

$$mes(A_{\tilde{M}}(F)\backslash Z_G(\gamma, F)) I_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(\gamma, \omega, f) = (-1)^{a_{\tilde{M}} - a_{\tilde{G}}} D^{\tilde{G}}(\gamma)^{1/2}$$

$$\sum_{\tau \in (E_{ell}(\tilde{G}, \omega)/conj)/i\mathcal{A}_{\tilde{G},F}^*} |\mathbf{Stab}(W^G \times i\mathcal{A}_{\tilde{G},F}^*, \tau)|^{-1} \iota(\tau) \int_{i\mathcal{A}_{\tilde{G},F}^*} \overline{\Theta(\tilde{\pi}_{\boldsymbol{\tau}_{\tilde{\lambda}}}, \gamma)} I_{\tilde{G}}(\tilde{\pi}_{\boldsymbol{\tau}_{\tilde{\lambda}}}, f)\, d\lambda.$$

Preuve. Si $\gamma \notin \tilde{M}(F)_{ell}$, on peut conjuguer $\gamma$ de sorte que $\gamma \in \tilde{L}(F)$, où $\tilde{L} \in \mathcal{L}(\tilde{M}_0)$ et $\tilde{L} \subsetneq \tilde{M}$. La formule de descente 6.5(2) (où on échange les rôles de $\tilde{M}$ et $\tilde{L}$) et la cuspidalité de $f$ entraînent la conclusion de (i).

Définissons une fonction $\varphi$ sur $\tilde{G}_{reg}(F)$ de la façon suivante. Soit $\gamma \in \tilde{G}_{reg}(F)$. Si $\omega$ est non trivial sur $Z_G(\gamma, F)$, on pose $\varphi(\gamma) = 0$. Sinon, choisissons $g \in G(F)$ et $\tilde{M} \in \mathcal{L}(\tilde{M}_0)$ de sorte que $g\gamma g^{-1} \in \tilde{M}(F)_{ell}$. Posons

$$\varphi(\gamma) = (-1)^{a_{\tilde{M}}-a_{\tilde{G}}} mes(A_{\tilde{M}}(F)\backslash Z_G(g\gamma g^{-1}, F)) D^{\tilde{G}}(\gamma)^{1/2}\omega(g)^{-1} I_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(g\gamma g^{-1}, \omega, f).$$

Cette définition est loisible d'après 6.5(1). Soit $f' \in C_c^\infty(\tilde{G}(F), K)$. Comme on l'a dit ci-dessus, le terme $I_{géom}^{\tilde{G}}(\omega, f', f)$ se simplifie puisque $f$ est cuspidale. Grâce à la formule de Weyl (cf. 4.1), on a simplement

$$I_{géom}^{\tilde{G}}(\omega, f', f) = \int_{\tilde{G}(F)} \overline{f'(\gamma)}\varphi(\gamma)\, d\gamma.$$

D'autre part

$$I_{spec}^{\tilde{G}}(\omega, f', f) = \sum_{\tau \in (E_{ell}(\tilde{G},\omega)/conj)/i\mathcal{A}_{\tilde{G},F}^*} |\mathbf{Stab}(W^G \times i\mathcal{A}_{\tilde{G},F}^*, \tau)|^{-1}\iota(\tau)$$

$$\int_{i\mathcal{A}_{\tilde{G},F}^*} I_{\tilde{G}}(\tilde{\pi}_{\boldsymbol{\tau}_{\tilde{\lambda}}}, f) \int_{\tilde{G}(F)} \overline{\Theta(\tilde{\pi}_{\boldsymbol{\tau}_{\tilde{\lambda}}}, \gamma) f'(\gamma)}\, d\gamma\, d\lambda.$$

Cette formule est absolument convergente, d'où

$$I_{spec}^{\tilde{G}}(\omega, f', f) = \int_{\tilde{G}(F)} \overline{f'(\gamma)}\varphi'(\gamma)\, d\gamma,$$

où

$$\varphi'(\gamma) = \sum_{\tau \in (E_{ell}(\tilde{G},\omega)/conj)/i\mathcal{A}_{\tilde{G},F}^*} |\mathbf{Stab}(W^G \times i\mathcal{A}_{\tilde{G},F}^*, \tau)|^{-1}\iota(\tau) \int_{i\mathcal{A}_{\tilde{G},F}^*} \overline{\Theta(\tilde{\pi}_{\boldsymbol{\tau}_{\tilde{\lambda}}}, \gamma)} I_{\tilde{G}}(\tilde{\pi}_{\boldsymbol{\tau}_{\tilde{\lambda}}}, f)\, d\lambda.$$

Le théorème 6.6 entraîne l'égalité

$$\int_{\tilde{G}(F)} \overline{f'(\gamma)}\varphi(\gamma)\, d\gamma = \int_{\tilde{G}(F)} \overline{f'(\gamma)}\varphi'(\gamma)\, d\gamma.$$

Si $F$ est non-archimédien, $f'$ est n'importe quel élément de $C_c^\infty(\tilde{G}(F))$ et cette égalité entraîne $\varphi(\gamma) = \varphi'(\gamma)$ pour tout $\gamma$, ce qui est l'assertion (2) du théorème. Si $F$ est archimédien, il y a un petit problème car $f'$ est supposée $K$-finie. Quelques calculs similaires à ceux du paragraphe 5.2 montrent que l'égalité ci-dessus se prolonge continûment à $f' \in C_c^\infty(\tilde{G}(F))$ tout entier. La conclusion est alors la même que dans le cas non-archimédien. $\square$

**Preuve de la proposition 6.5** Soient $\tilde{M} \in \mathcal{L}(\tilde{M}_0)$, $\gamma \in \tilde{M}(F) \cap \tilde{G}_{reg}(F)$ et $f \in \mathcal{H}_{ac}(\tilde{G}(F))$ dont l'image dans $I_{ac}(\tilde{G}(F), \omega)$ soit nulle. On veut montrer que $I_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(\gamma, \omega, f) = 0$. La relation 6.5(3) nous ramène au cas où $f \in C_c^\infty(\tilde{G}(F), K)$. Son image dans $I(\tilde{G}(F), K, \omega)$ est nulle, a fortiori $f$ est cuspidale. Si $\gamma$ n'est pas elliptique dans $\tilde{M}(F)$, l'assertion cherchée résulte du (i) du théorème ci-dessus. Si $\gamma$ est elliptique dans $\tilde{M}(F)$, elle résulte du (ii) puisque $I_{\tilde{G}}(\tilde{\pi}_{\boldsymbol{\tau}_{\tilde{\lambda}}}, f) = 0$ pour tous $\tau$ et $\tilde{\lambda}$. $\square$

## 7.2 Fonctions cuspidales, variante avec caractère central

On introduit le groupe $\underline{G}$ de 6.7 et les notations afférentes. Soit $\mu$ un caractère unitaire de $A_{\tilde{G}}(F)$. On définit comme au paragraphe précédent la notion de cuspidalité pour une fonction $f \in C_\mu^\infty(\tilde{G}(F), K)$. On note $C_{\mu,cusp}^\infty(\tilde{G}(F), K)$ le sous-espace des fonctions cuspidales. On note $I_{\mu,cusp}(\tilde{G}(F), K, \omega)$ le quotient de $C_{\mu,cusp}^\infty(\tilde{G}(F), K)$ par le sous-espace des fonctions dont toutes les intégrales orbitales régulières sont nulles. Une variante avec caractère central du théorème 6.2 conduit à l'assertion suivante. On définit de façon évidente l'ensemble $E_{ell,\mu}(\tilde{G}, \omega)$. Pour tout $\tau \in E_{ell,\mu}(\tilde{G}, \omega)/conj$, fixons un élément $\boldsymbol{\tau} \in \mathcal{E}(\tilde{G}, \omega)$ qui relève $\tau$. Considérons l'application

$$\begin{array}{ccc} C_{\mu,cusp}^\infty(\tilde{G}(F), K) & \to & \sum_{\tau \in E_{ell,\mu}(\tilde{G},\omega)/conj} \mathbb{C} \\ f & \mapsto & \oplus_{\tau \in E_{ell,\mu}(\tilde{G},\omega)/conj} I_{\underline{\tilde{G}}}(\tilde{\pi}_{\boldsymbol{\tau}}, f). \end{array}$$

Alors

(1) cette application se quotiente en un isomorphisme

$$I_{\mu,cusp}(\tilde{G}, K, \omega) \simeq \oplus_{\tau \in E_{ell,\mu}(\tilde{G},\omega)/conj} \mathbb{C}.$$

Autrement dit, pour tout $\tau \in E_{ell,\mu}(\tilde{G}, \omega)/conj$, il existe un unique pseudo-coefficient $f_\tau \in I_{\mu,cusp}(\tilde{G}(F), K, \omega)$ tel que, pour $\tau' \in E_{ell,\mu}(\tilde{G}, \omega)/conj$, on ait

$$I_{\underline{\tilde{G}}}(\tilde{\pi}_{\boldsymbol{\tau}'}, f_\tau) = \begin{cases} 1, & \text{si } \tau' = \tau, \\ 0, & \text{si } \tau' \neq \tau. \end{cases}$$

Et la famille $(f_\tau)_{\tau \in E_{ell,\mu}(\tilde{G},\omega)/conj}$ est une base de $I_{\mu,cusp}(\tilde{G}(F), K)$.

**Théorème**. *Soient $\tau \in E_{ell,\mu}(\tilde{G}, \omega)/conj$, $\tilde{M} \in \mathcal{L}(\tilde{M}_0)$ et $\gamma \in \tilde{M}(F)_{ell} \cap \tilde{G}_{reg}(F)$. On a l'égalité*

$$mes(A_{\underline{\tilde{M}}}(F)\backslash Z_{\underline{G}}(\gamma, F)) I_{\underline{\tilde{M}}}^{\underline{\tilde{G}}}(\gamma, \omega, f_\tau) = (-1)^{a_{\tilde{M}} - a_{\tilde{G}}} D^{\tilde{G}}(\gamma)^{1/2} |\mathbf{Stab}(W^G, \tau)|^{-1} \iota(\tau) \overline{\Theta(\tilde{\pi}_{\boldsymbol{\tau}}, \gamma)}.$$

C'est la version avec caractère central du (ii) du théorème précédent, appliqué au pseudo-coefficient $f_\tau$. Remarquons que, pour $\tau = (M_{disc}, \sigma, \tilde{r}) \in E_{ell,\mu}(\tilde{G}, \omega)$, $\mathbf{Stab}(W^G, \tau)$ n'est autre que le commutant de $\tilde{r}$ dans $R^G(\sigma)$.

## 7.3 Produit scalaire elliptique

Notons $\underline{\tilde{G}}(F)_{ell}/conj$ l'ensemble des classes de conjugaison par $G(F)$ dans $\underline{\tilde{G}}(F)_{ell} = \tilde{G}(F)_{ell}/A_{\tilde{G}}(F)$. On munit cet ensemble d'une structure de variété analytique sur $F$ de sorte que, pour tout $\gamma \in \underline{\tilde{G}}(F)_{ell}$, l'application qui, à $x \in \underline{G}_\gamma(F)$, associe la classe de conjugaison de $x\gamma$, se quotiente en un isomorphisme local de $\underline{G}_\gamma(F)$ sur $\underline{\tilde{G}}(F)_{ell}/conj$ au voisinage de $x = 1$. De même, on munit $\underline{\tilde{G}}(F)_{ell}/conj$ de la mesure pour laquelle ces applications préservent la mesure au voisinage de $x = 1$. On définit une fonction $m$ sur $\underline{\tilde{G}}(F)_{ell}/conj$ de la façon suivante. Pour $\gamma \in \underline{\tilde{G}}(F)$, soit $\underline{\tilde{S}}$ l'unique tore tordu maximal de $\underline{\tilde{G}}$ contenant $\gamma$. Alors

$$m(\gamma) = mes(\underline{S}^\theta(F)).$$

Pour une fonction $\varphi \in C_c^\infty(\underline{G}(F)_{ell}/conj)$, l'intégrale

$$\int_{\underline{G}(F)_{ell}/conj} m(\gamma)^{-1}\varphi(\gamma)\,d\gamma$$

ne dépend d'aucune mesure. Elle est égale à

$$\sum_{S\in T_{ell}(\tilde{G})} |W^G(\tilde{S})|^{-1} mes(\underline{S}^\theta(F))^{-1} \int_{\underline{\tilde{S}}(F)/(1-\theta)(\underline{S}(F))} \varphi(\gamma)\,d\gamma.$$

Soient $\mu$ un caractère unitaire de $A_{\tilde{G}}(F)$. Soient $\tilde{\pi}_1$ et $\tilde{\pi}_2$ deux $\omega$-représentations de $\tilde{G}(F)$, de longueur finie et de $A$-caractère central $\mu$. La fonction $\gamma \mapsto \overline{\Theta(\tilde{\pi}_1,\gamma)}\Theta(\tilde{\pi}_2,\gamma)$ sur $\tilde{G}(F)_{ell}$ se quotiente en une fonction sur $\underline{\tilde{G}}(F)_{ell}/conj$. On pose

$$(\tilde{\pi}_1,\tilde{\pi}_2)_{ell} = \int_{\underline{\tilde{G}}(F)_{ell}/conj} m(\gamma)^{-1} D^{\tilde{G}}(\gamma)\overline{\Theta(\tilde{\pi}_1,\gamma)}\Theta(\tilde{\pi}_2,\gamma)\,d\gamma.$$

Cette expression ne dépend d'aucune mesure.

Rappelons que, pour tout $\tau \in E_{ell,\mu}(\tilde{G},\omega)$, on a choisi un relèvement $\boldsymbol{\tau}$ de $\tau$ dans $\mathcal{E}_{ell}(\tilde{G},\omega)$.

**Théorème**. *(i) Soient $\tau_1,\tau_2 \in \mathcal{E}_{ell,\mu}(\tilde{G},\omega)$. Supposons qu'ils ne sont pas conjugués par $G(F)$. Alors on a l'égalité $(\tilde{\pi}_{\boldsymbol{\tau}_1},\tilde{\pi}_{\boldsymbol{\tau}_2})_{ell} = 0$.*

*(ii) Soit $\tau \in \mathcal{E}_{ell,\mu}(\tilde{G},\omega)$. On a l'égalité*

$$(\tilde{\pi}_{\boldsymbol{\tau}},\tilde{\pi}_{\boldsymbol{\tau}})_{ell} = |\mathbf{Stab}(W^G,\tau)|\iota(\tau)^{-1}.$$

Preuve. En appliquant le théorème 7.2, on voit que

$$(\tilde{\pi}_{\boldsymbol{\tau}_1},\tilde{\pi}_{\boldsymbol{\tau}_2})_{ell} = |\mathbf{Stab}(W^G,\tau_1)||\mathbf{Stab}(W^G,\tau_2)|\iota(\tau_1)^{-1}\iota(\tau_2)^{-1}X,$$

où

$$X = \int_{\underline{\tilde{G}}(F)_{ell}/conj} m(\gamma)\overline{I_{\underline{\tilde{G}}}(\gamma,\omega,f_{\tau_1})} I_{\underline{\tilde{G}}}(\gamma,\omega,f_{\tau_2})\,d\gamma.$$

Il résulte des définitions que $X = I^{\tilde{G}}_{\underline{\tilde{G}},géom}(\omega,f_{\tau_1},f_{\tau_2})$. Par le même argument qu'en 7.1 et parce que les fonctions $f_{\tau_1}$ et $f_{\tau_2}$ sont toutes deux cuspidales, les termes $I^{\tilde{G}}_{\underline{\tilde{M}},géom}(\omega,f_{\tau_1},f_{\tau_2})$ sont nuls pour $\tilde{M} \neq \tilde{G}$. Donc $X = I^{\tilde{G}}_{géom}(\omega,f_{\tau_1},f_{\tau_2})$. Appliquons le théorème 6.7 : $X = I^{\tilde{G}}_{disc}(\omega,f_{\tau_1},f_{\tau_2})$. Mais cette expression se calcule grâce à la définition des pseudo-coefficients. On obtient $I^{\tilde{G}}_{disc}(\omega,f_{\tau_1},f_{\tau_2}) = 0$ si $\tau_1$ et $\tau_2$ ne sont pas conjugués. Si $\tau_1 = \tau_2 = \tau$, on obtient

$$I^{\tilde{G}}_{disc}(\omega,f_\tau,f_\tau) = |\mathbf{Stab}(W^G,\tau)|^{-1}\iota(\tau).$$

Le théorème en résulte. $\square$

## 7.4 Produit elliptique pour les $\omega$-représentations irréductibles

Soit $\mu$ un caractère unitaire de $A_{\tilde{G}}(F)$. Pour $i = 1,2$, soient $M_i \in \mathcal{P}(M_0)$ et $\sigma_i$ une représentation irréductible et de la série discrète de $M_i(F)$. On suppose que la restriction à $A_{\tilde{G}}(F)$ du caractère central de $\sigma_i$ est égale à $\mu$. On suppose $\mathcal{N}^{\tilde{G}}(\sigma_i)$ non vide. Soit $\tilde{\rho}_i$ une représentation $\mathcal{R}^G(\sigma_i)$-irréductible de $\mathcal{R}^{\tilde{G}}(\sigma_i)$. Définissons un terme $(\tilde{\rho}_1, \tilde{\rho}_2)_{ell}$ de la façon suivante. Supposons d'abord que les couples $(M_1, \sigma_1)$ et $(M_2, \sigma_2)$ soient égaux. On les note simplement $(M, \sigma)$. Supposons de plus $W_0^G(\sigma) = \{1\}$. La fonction $\tilde{\boldsymbol{r}} \mapsto \overline{trace(\tilde{\rho}_1(\tilde{\boldsymbol{r}}))} trace(\tilde{\rho}_2(\tilde{\boldsymbol{r}}))$ sur $\mathcal{R}^{\tilde{G}}(\sigma)$ se descend en une fonction sur $R^{\tilde{G}}(\sigma)$. On pose

$$(\tilde{\rho}_1, \tilde{\rho}_2)_{ell} = |R^G(\sigma)|^{-1} \sum_{\tilde{r} \in R^{\tilde{G}}(\sigma) \cap W^{\tilde{G}}_{reg}(\sigma)} |det((1-\tilde{r})_{|\mathcal{A}_M^{\tilde{G}}})| trace(\tilde{\rho}_1(\tilde{r})) \overline{trace(\tilde{\rho}_2(\tilde{r}))}.$$

Supposons maintenant que $W_0^G(\sigma_i) = \{1\}$ pour $i = 1,2$ et que les couples $(M_1, \sigma_1)$ et $(M_2, \sigma_2)$ sont conjugués par un élément de $G(F)$. En effectuant une telle conjugaison, on remplace $(M_2, \sigma_2, \tilde{\rho}_2)$ par $(M_1, \sigma_1, \tilde{\rho}'_2)$. On pose

$$(\tilde{\rho}_1, \tilde{\rho}_2)_{ell} = (\tilde{\rho}_1, \tilde{\rho}'_2)_{ell}.$$

Cela ne dépend pas de la conjugaison choisie. Dans les cas restants, c'est-à-dire si $W_0^G(\sigma_1)$ ou $W_0^G(\sigma_2)$ est non trivial, ou si $(M_1, \sigma_1)$ et $(M_2, \sigma_2)$ ne sont pas conjugués, on pose $(\tilde{\rho}_1, \tilde{\rho}_2)_{ell} = 0$.

Pour $i = 1,2$, on a associé en 2.8 à $(M_i, \sigma_i, \tilde{\rho}_i)$ une représentation $G$-irréductible $\tilde{\pi}_{\tilde{\rho}_i}$ de $\tilde{G}(F)$.

**Corollaire**. *On a l'égalité* $(\tilde{\pi}_{\tilde{\rho}_1}, \tilde{\pi}_{\tilde{\rho}_2})_{ell} = (\tilde{\rho}_1, \tilde{\rho}_2)_{ell}$.

Preuve. Pour $i = 1,2$ et pour $\tilde{r} \in R^{\tilde{G}}(\sigma_i)$, posons $\tau_i(\tilde{r}) = (M_i, \sigma_i, \tilde{r})$. Notons $R^{\tilde{G}}_{ess}(\sigma_i)$ l'ensemble des $\tilde{r} \in R^{\tilde{G}}(\sigma_i)$ tels que $\tau_i(\tilde{r})$ soit essentiel. Pour $\tilde{r} \in R^{\tilde{G}}_{ess}(\sigma_i)$, on fixe un relèvement $\boldsymbol{\tau}_i(\tilde{r}) = (M_i, \sigma_i, \tilde{\boldsymbol{r}})$ de $\tau_i$ dans $\mathcal{E}(\tilde{G}, \omega)$. On a vu dans la preuve de la proposition 2.9 une formule d'inversion exprimant $\Theta(\tilde{\pi}_{\tilde{\rho}_i})$ en fonction des $\Theta(\tilde{\pi}_{\boldsymbol{\tau}_i(\tilde{r})})$ pour $\tilde{r} \in R^{\tilde{G}}_{ess}(\sigma_i)$. Dans cette formule, on sommait sur les classes de conjugaison dans cet ensemble. On peut la récrire comme une somme sur tous les éléments de cet ensemble sous la forme

$$\Theta(\tilde{\pi}_{\tilde{\rho}_i}) = |R^G(\sigma_i)|^{-1} \sum_{\tilde{r} \in R^{\tilde{G}}_{ess}(\sigma_i)} \overline{trace(\tilde{\rho}_i(\tilde{\boldsymbol{r}}))} \Theta(\tilde{\pi}_{\boldsymbol{\tau}_i(\tilde{r})}).$$

Si $W_0^G(\sigma_i) \neq \{1\}$, il résulte des lemmes 2.10 et 2.11 que toutes les représentations $\tilde{\pi}_{\boldsymbol{\tau}_i(\tilde{r})}$ sont des induites à partir d'espaces paraboliques propres. Leur caractère est donc nul sur $\tilde{G}(F)_{ell}$. Il en résulte que, si $W_0^G(\sigma_1)$ ou $W_0^G(\sigma_2)$ est non trivial, $(\tilde{\pi}_{\tilde{\rho}_1}, \tilde{\pi}_{\tilde{\rho}_2})_{ell} = 0$. D'où l'égalité de l'énoncé dans ce cas. On suppose maintenant $W_0^G(\sigma_1) = \{1\}$ et $W_0^G(\sigma_2) = \{1\}$. On a alors $R^{\tilde{G}}(\sigma_i) = W^{\tilde{G}}(\sigma_i)$ pour $i = 1,2$. Toujours d'après les lemmes 2.10 et 2.11, les représentations $\tilde{\pi}_{\boldsymbol{\tau}_i(\tilde{r})}$ pour $\tilde{r} \notin W^{\tilde{G}}_{reg}(\sigma_i)$ ont un caractère nul sur $\tilde{G}(F)_{ell}$. On obtient l'égalité

$$(\tilde{\pi}_{\tilde{\rho}_1}, \tilde{\pi}_{\tilde{\rho}_2})_{ell} = |R^G(\sigma_1)|^{-1} |R^G(\sigma_2)|^{-1} \sum_{\tilde{r}_1 \in R^{\tilde{G}}_{ess}(\sigma_1) \cap W^{\tilde{G}}_{reg}(\sigma_1)} \sum_{\tilde{r}_2 \in R^{\tilde{G}}_{ess}(\sigma_2) \cap W^{\tilde{G}}_{reg}(\sigma_2)}$$

$$trace(\tilde{\rho}_1(\tilde{\boldsymbol{r}}_1)) \overline{trace(\tilde{\rho}_2(\tilde{\boldsymbol{r}}_2))} (\tilde{\pi}_{\boldsymbol{\tau}_1(\tilde{r}_1)}, \tilde{\pi}_{\boldsymbol{\tau}_2(\tilde{r}_2)})_{ell}.$$

Si $(M_1,\sigma_1)$ et $(M_2,\sigma_2)$ ne sont pas conjugués, le (i) du théorème 7.3 dit que le membre de droite ci-dessus est nul, d'où encore l'égalité de l'énoncé. Si les deux couples sont conjugués, on peut les supposer égaux, on les note simplement $(M,\sigma)$. Le (i) du théorème 7.3 dit que seuls les couples $(\tilde{r}_1,\tilde{r}_2)$ formés d'éléments conjugués contribuent à la formule ci-dessus. Pour un couple d'éléments conjugués, les valeurs des différents termes intervenant sont les mêmes pour $\tilde{r}_1$ et $\tilde{r}_2$. On a déjà dit que, pour un triplet elliptique $\tau=(M,\sigma,\tilde{r})$, on a l'égalité $\mathbf{Stab}(W^G,\tau)=Stab(R^G(\sigma),\tilde{r})$, ce dernier groupe étant le commutant de $\tilde{r}$ dans $R^G(\sigma)$. On a aussi $\iota(\tau)^{-1}=|det((1-\tilde{r})_{|\mathcal{A}_M^{\tilde{G}}}|$. Grâce au (ii) du théorème 7.3, la contribution d'un couple $(\tilde{r}_1,\tilde{r}_2)$ d'éléments conjugués à la formule ci-dessus est donc

$$|Stab(R^G(\sigma),\tilde{r}_1)||det((1-\tilde{r}_1)_{|\mathcal{A}_M^{\tilde{G}}}|trace(\tilde{\rho}_1(\tilde{\boldsymbol{r}}_1))\overline{trace(\tilde{\rho}_2(\tilde{\boldsymbol{r}}_1))}.$$

Pour $\tilde{r}_1$ fixé, le nombre de $\tilde{r}_2$ conjugués à $\tilde{r}_1$ est $|R^G(\sigma)||Stab(R^G(\sigma),\tilde{r}_1)|^{-1}$. Notre formule devient

$$(\tilde{\pi}_{\tilde{\rho}_1},\tilde{\pi}_{\tilde{\rho}_2})_{ell}=|R^G(\sigma)|^{-1}\sum_{\tilde{r}\in R^{\tilde{G}}_{ess}(\sigma)\cap W^{\tilde{G}}_{reg}(\sigma)}|det((1-\tilde{r})_{|\mathcal{A}_M^{\tilde{G}}}|trace(\tilde{\rho}_1(\tilde{\boldsymbol{r}}))\overline{trace(\tilde{\rho}_2(\tilde{\boldsymbol{r}}))}.$$

C'est presque la définition de $(\tilde{\rho}_1,\tilde{\rho}_2)_{ell}$, à ceci près qu'ici, la somme est limitée à $\tilde{r}\in R^{\tilde{G}}_{ess}(\sigma)\cap W^{\tilde{G}}_{reg}(\sigma)$. Mais, si $\tilde{r}\notin R^{\tilde{G}}_{ess}(\sigma)$, les termes $trace(\tilde{\rho}_1(\tilde{\boldsymbol{r}}))$ et $trace(\tilde{\rho}_2(\tilde{\boldsymbol{r}}))$ sont nuls. On peut donc remplacer la somme sur $R^{\tilde{G}}_{ess}(\sigma)\cap W^{\tilde{G}}_{reg}(\sigma)$ par celle sur tout $W^{\tilde{G}}_{reg}(\sigma)$. Cela achève la preuve. $\square$

**Bibliographie**


[A1] J. Arthur : *A local trace formula*, Publ. Math. de l'IHES 73 (1991), p.5-96

[A2] ——— : *The trace formula in invariant form*, Annals of Math. 114 (1981), p.1-74

[A3] ——— : *Intertwining operators and residues I. Weighted characters*, J. of Functional Analysis 84 (1989), p.19-84

[A4] ——— : *Canonical normalization of weighted characters and a transfer conjecture*, C. R. Math. Rep. Acad. Sci. Canada 20 (1998), p.35-52

[A5] ——— : *On the Fourier transforms of weighted orbital integrals*, J. reine angew. Math. 452 (1994), p.163-217

[A6] ——— : *The invariant trace formula I. Local theory*, J. AMS 1 (1988), p.323-383

[A7] ——— : *On elliptic tempered characters*, Acta Math. 171 (1993), p.73-138

[A8] ——— :*The trace Paley-Wiener theorem for Schwartz functions*, Contemporary Math. 177 (1994), p. 171-180

[BT] F. Bruhat, J. Tits : *Groupes réductifs sur un corps local I. Données radicielles valuées*, Publ. Math. IHES 41 (1972), p.5-251

[B] A. Bouaziz : *Sur les caractères des groupes de Lie réductifs non connexes*, J. of Functional Analysis 70 (1987), p.1-79

[C] L. Clozel : *Characters of non-connected, reductive p-adic groups* p.149-

[DM] P. Delorme, P. Mezo : *A twisted invariant Paley-Wiener theorem for real reductive groups*, Duke Math. J. 144 (2008), p.341-380

[HC] Harish-Chandra : *Spherical functions on a semi-simple Lie group I*, Amer. J. of Math. 80 (1958), p.241-316

[HL] G. Henniart, B. Lemaire : *La transformée de Fourier tordue pour les groupes réductifs p-adiques*, en préparation

[LW] J.-P. Labesse, J.-L. Waldspurger : *La formule des traces tordue d'après le Friday morning seminar*, prépublication 2012, Arxiv RT 12042888

[L] B. Lemaire : *Caractères tordus des représentations admissibles*, prépublication 2010.

[R] J. Rogawski : *The trace Paley-Wiener theorem in the twisted case*, Trans. Amer. Math. Soc. 309 (1988), p.215-229

[W] J.-L. Waldspurger : *La formule de Plancherel pour les groupes p-adiques d'après Harish-Chandra*, Journal de l'Inst. de Math. Jussieu 2 (2003), p.235-333

Institut de mathématiques de Jussieu- CNRS
2 place Jussieu, 75005 Paris
e-mail : waldspur@math.jussieu.fr